Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Оренбургский государственный университет» Кафедра радиофизики и электроники

*М.Р. Расовский, А.П. Русинов*

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА И МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД**

Курс лекций

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург ИПК ГОУ ОГУ

УДК 531 (07) ББК 22.21я7

Р 24

Научный редактор: доктор физико-математических наук, профессор М.Г. Кучеренко

Рецензент: доктор физико-математических наук, профессор О.Н. Каныгина

Р 24 **Расовский, М.Р.**

Теоретическая механика и механика сплошных сред: курс лекций / М.Р. Расовский, А.П. Русинов; Оренбургский гос. ун- т. – Оренбург : ОГУ, 2011. – 152 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов физических факультетов университетов, изучающих курс «Теоретическая механика и механика сплошных сред». В пособии сделан основной упор на физическое содержание изучаемых законов механики, при этом изложение строится с учетом применений закономерностей классической механики в изучении других разделов теоретической физики – электродинамики, квантовой теории, статистической физики и др. Пособие может быть использовано как студентами-физиками, так и преподавателями, читающими соответствующий лекционный курс или ведущими практические занятия по теоретической механике на физических факультетах университетов.

УДК 531 (07) ББК 22.21я7

 Расовский М.Р., Русинов А.П., 2011

 ГОУ ОГУ, 2011

2



## Содержание

[Введение 5](#_TOC_250040)

1. [Основы динамики механической системы 8](#_TOC_250039)
   1. [Уравнения движения механической системы 8](#_TOC_250038)
   2. [Основная задача механики. Принцип причинности в классической механике 9](#_TOC_250037)
   3. [Работа силы и потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле 13](#_TOC_250036)
2. [Законы сохранения и основные теоремы динамики 16](#_TOC_250035)
   1. [Первые интегралы уравнений движения и законы сохранения 16](#_TOC_250034)
   2. [Закон сохранения механической энергии 19](#_TOC_250033)
   3. Закон сохранения импульса для замкнутой механической системы . 22
   4. [Закон сохранения момента импульса для замкнутой механической системы 24](#_TOC_250032)
3. [Применение законов сохранения и основных теорем динамики к интегрированию уравнений движения 31](#_TOC_250031)
   1. [Одномерное движение 31](#_TOC_250030)
   2. [Задача двух тел 33](#_TOC_250029)
   3. [Движение частицы в центрально-симметричном поле 36](#_TOC_250028)
   4. [Движение частицы в кулоновом поле 42](#_TOC_250027)
4. [Основы аналитической механики 50](#_TOC_250026)
   1. [Принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона) 50](#_TOC_250025)
   2. [Обобщённые координаты и обобщённые импульсы 55](#_TOC_250024)
   3. [Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона 61](#_TOC_250023)
   4. [Интегралы движения. Скобки Пуассона 65](#_TOC_250022)
   5. [Уравнение Гамильтона-Якоби 67](#_TOC_250021)
   6. [Оптико-механическая аналогия 71](#_TOC_250020)
5. [Основы динамики твёрдого тела 77](#_TOC_250019)
   1. [Угловая скорость 77](#_TOC_250018)
   2. [Тензор инерции 80](#_TOC_250017)
   3. [Момент импульса твёрдого тела 85](#_TOC_250016)
   4. [Уравнения движения твёрдого тела 88](#_TOC_250015)
   5. [Уравнения Эйлера 91](#_TOC_250014)
   6. [Движение в неинерциальной системе отсчёта 98](#_TOC_250013)
6. [Малые колебания 107](#_TOC_250012)
   1. [Свободные колебания 107](#_TOC_250011)
   2. [Затухающие колебания 109](#_TOC_250010)
   3. [Вынужденные колебания 112](#_TOC_250009)
   4. [Колебания системы со многими степенями свободы 116](#_TOC_250008)
7. [Основы механики сплошных сред 124](#_TOC_250007)
   1. [Понятие об элементах сплошной среды. Поверхностные силы упругости в идеальной сплошной среде 124](#_TOC_250006)
   2. [Уравнение непрерывности 129](#_TOC_250005)
   3. [Стационарный поток механической энергии в несжимаемой жидкости 132](#_TOC_250004)
   4. [Две формы описания произвольного упорядоченного движения в сплошной среде 136](#_TOC_250003)
   5. [Уравнения Эйлера для идеальной жидкости 141](#_TOC_250002)
   6. [Ламинарное течение вязкой жидкости. Сопротивление жидкости движущимся телам 143](#_TOC_250001)
8. [Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины 152](#_TOC_250000)

## Введение

Данное учебное пособие предназначено для студентов физических факультетов университетов, изучающих курс «Теоретическая механика и механика сплошных сред». Авторам представляется, что курс теоретической механики, изучаемый будущими физиками, должен существенно отличаться от одноименного курса, предназначенного для студентов технических специальностей. Особый упор, по нашему убеждению, должен делаться на физическом содержании изучаемых законов механики; при этом изложение должно строиться с учетом последующих применений закономерностей классической механики в изучении других разделов теоретической физики – электродинамики, квантовой теории, статистической физики и др. Поэтому мы сочли возможным в разделе «Аналитическая механика» сделать акцент на вариационном принципе Гамильтона и не рассматривать такие вопросы, как принцип виртуальных перемещений и общее уравнение динамики.

Последняя глава учебного пособия посвящена основам механики сплошных сред. В ней рассматриваются свойства упругих твердых тел (элементы теории упругости) и жидкостей, как идеальных, так и вязких (элементы гидростатики и гидродинамики). При этом изложение ведется в общефизическом плане, без излишней детализации – последняя, на наш взгляд, должна проводиться в специальных курсах.

Пособие может быть использовано как студентами-физиками, так и преподавателями, читающими соответствующий лекционный курс или ведущими практические занятия по теоретической механике на физических факультетах университетов.

Предмет классической механики. Основные модели. Пространство и время в классической механике

Механика изучает механическое движение, т.е. изменение со временем пространственного расположения одних тел относительно других.

*Задача механики* – обобщить экспериментальные данные о движениях тел и сформулировать законы движения.

Классическая механика изучает достаточно медленные (υ<<c) движения макроскопических тел по отношению друг к другу.

Основные модели классической механики: материальная точка (частица); система частиц; абсолютно твёрдое тело.

*Частица (материальная точка)* – тело, размерами которого в контексте рассматриваемой задачи можно пренебречь.

*Система частиц* – совокупность тел, каждое из которых может считаться материальной точкой.

*Абсолютно твёрдое тело* – система частиц, расстояния между любой парой из которых со временем не меняются.

Механическое движение, как и всякий физический процесс, развивается *в пространстве* и *во времени*.

Для удобства рассмотрения физические процессы разделяются на *элементарные события* (аналог точки в геометрии). Дать строгое определение этому понятию нельзя. На интуитивном уровне под элементарным событием понимается то, что произошло в данном месте пространства в данный момент времени.

Пространство в классической механике считается трёхмерным и евклидовым.

Для арифметизации пространства вводят пространственную систему координат и выбирают тело отсчёта, с к которым связывают точку *О* – начало отсчета. Указывается также эталонный масштаб длины.

*Время является одномерным и однонаправленным.* Для арифметизации времени вводят временную систему координат: фиксируют начало отсчёта времени и выбирают прибор для измерения времени (часы). Под часами понимается любой повторяющийся процесс, который по определению считается периодическим.

*Время в классической механике считается абсолютным.* Это означает, что оно протекает одинаково во всех точках пространства, причём ход часов не зависит от того, движутся ли они или покоятся. Другими словами, пространство и время в классической механике никак не связаны между собой.

В специальной теории относительности показывается, что постулат об абсолютности времени равнозначен предположению о существовании в природе сигналов, распространяющихся со сколь угодно большой скоростью, т.е. мгновенно. На самом деле существует предельная скорость *c* – скорость света в вакууме.

Совокупность пространственной и временной систем координат называется *системой отсчёта*.

В силу абсолютности времени в классической механике нет необходимости снабжать часами каждую точку: достаточно одних часов, помещённых, например, в начало пространственной системы координат.

## Основы динамики механической системы

*Кинематика* рассматривает движения тел без выяснения условий, при которых осуществляется то или иное движение. Кинематика подробно изучается в курсе общей физики.

Раздел механики, в котором изучаются причины движения, называется *динамикой*.

В отличие от кинематики, где движение описывается только с помощью координат, скоростей и ускорений, в динамике вводятся величины, характеризующие взаимодействие тел: сила, масса, энергия и др. Именно эти величины и определяют характер движения.

* 1. Уравнения движения механической системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n частиц (материальных точек). Применяя к этой системе 2-й закон Ньютона,

можем записать её уравнения движения относительно ИСО в виде



*mi ri*  *Fi*

Здесь *Fi*

(*i*  1, 2,..., *n*) . (1.1.1)

– суммарная сила, приложенная к *i*-й частице. В общем случае её

можно записать в виде

  *n* 

*F*  *F* (*e*)   *F*

где

(*e*)

*i*

*F*

*i i ij* , (1.1.2)

*j*1 ji

* равнодействующая всех внешних сил, приложенных к *i*-й

частице системы,

*Fij*

* равнодействующая внутренних сил, действующих на *i*-ю частицу

системы.

Объединяя (1.1.1) и (1.1.2), получаем систему *n* дифференциальных уравнений движения:



*n*

(*e*)





*mi ri*

 *Fi*

*  *Fij*

*j*1 *j*i

(1.1.3)

#### (*i*  1, 2,...*n*)

В дальнейшем всюду будем считать, что внутренние силы

*Fij*

удовлетворяют 3-му закону Ньютона, следовательно, имеют вид

*Fij*

 *Fji*

и  *Fij*

*i j*

 0 . Относительно внешних сил

(*e*)

*F*

*i*

будем предполагать, что

они в общем случае могут явно зависеть от *t*, а также от положений и скоростей соответствующих частиц системы относительно внешних тел, т.е.

*F* (*e*)

  *F* (*e*) (*r* ,* * , *t*)

(1.1.4)

*i i i i*

**

где ** – номер внешнего тела,

####      

*ri*

 *ri*  *r* ,

*i*

 *i* ** . (1.1.5)

По индексу ** производится суммирование по всем внешним телам, не входящим в рассматриваемую механическую систему.

* 1. Основная задача механики. Принцип причинности в классической механике

Рассмотрим движение относительно некоторой ИСО механической

системы из *n* частиц. Пусть на это движение заранее не наложено никаких ограничений. Это значит, что в любой момент времени *t* значения

#### 

радиусов-векторов *ri*

и скоростей



*i* всех частиц системы определяются

**

только уравнениями Ньютона. Анализ этих уравнений показывает, что можно рассматривать два типа динамических задач.

1. *Прямая (или основная) задача* – задача об отыскании радиусов-

векторов частиц как функций времени

*ri* (*t*)

по заданным внутренним

*Fij* и

внешним

(*e*)

*i*

*F*

силам и известным массам частиц *mi*. Математически эта

задача сводится к нахождению общего решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

 *d* 2 *x*

 *n*

(*e*)

*mi i*

 *Fix*  (*Fx* )*ij*

 *dt* 2

 *d* 2 *y*

#### 

(*e*)

*j*1*, j**i n*

*mi i*

 *Fiy*  (*Fy* )*ij*

 *dt* 2

 2

*d z*

*m i*

#### 

 *F* (*e*) 

*j*1*, j**i*

(*F* )

*n*

. (1.2.1)

 *i*

*dt* 2

*iz*

*j*1*, j**i*

*z ij*

#### (*i*  1,2,..., *n*).

1. *Обратная задача* – задача о нахождении полной силы

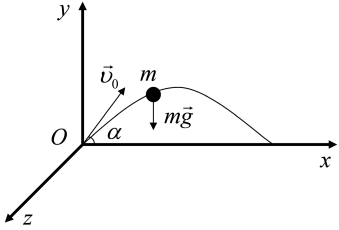
*Fi* ,

действующей на *i*-ю частицу механической системы, по её массе *mi* и

заданному радиусу-вектору

*ri* (*t*)

как функции времени.

Нетрудно видеть, что обратная задача всегда может

#### 

быть решена, если

*ri* (*t*) –

Рисунок 1.1 – К задаче о баллистическом свободном движении тела в однородном поле тяжести

непрерывные и дважды дифференцируемые функции, поскольку решение обратной задачи сводится к простой операции дифференцирования.

Несравненно труднее получить решение основной

задачи динамики, которая сводится к процедуре интегрирования системы дифференциальных уравнений (1.2.1). Для примера рассмотрим задачу

(рисунок 1.1) о баллистическом движении частицы в однородном поле тяжести (сопротивление воздуха учитывать не будем).

Запишем дифференциальные уравнения движения частицы

или

*m**x*  0,

*m**y*  *mg* ,

*m**z*  0

(1.2.2)

#### *x*  0,

*y*   *g*,

*z*  0 .

Заметим, что независимость законов свободного падения тел в поле тяжести Земли от их массы впервые экспериментально открыта Галилеем.

Общее решение системы уравнений (1.2.2) имеет вид

*x*  *C*1*t*  *C*2

#### 

1

2

 *y*   *gt*

2

#### 

 *C*3  *C*4 . (1.2.3)

*z*  *C*5*t*  *C*6

Это – шестипараметрическое семейство кривых, включающее различные параболы и прямые. Отсюда видно, что сама по себе система уравнений (1.2.2) ещё не даёт ответа на вопрос о том, как будет двигаться частица в поле притяжения Земли. Она лишь утверждает, что движение может происходить по одной из кривых, принадлежащих семейству (1.2.3). Чтобы на поставленный вопрос получить однозначный ответ, необходимо задать начальные условия, т.е. задать положение и скорость частицы в некоторый момент времени.

Пусть, например, при *t*=0

*x(0)*  *y(0)*  *z(0)*  *0*

*x**(0)*  *0*

cos** ,

*y*(0)  *0*

sin ** ,

*z*(0)  0 . (1.2.4)

Начальные условия (1.2.4) отбирают из семейства кривых (1.2.3) единственную кривую, по которой при этом будет происходить движение частицы. Траекторией тела, брошенного под углом ** к горизонту, как

известно, является парабола, в параметрической форме ее выражение записывается как

*x*  *v*0 *t* cos**

#### 

 *y*  *v*



0

#### 

*z*  0

или в явной форме

*t* sin ** 

*gt* 2

#### 2

, (1.2.5)

.



 *z*  0

0

2

2

2*v* cos **



*y*  *x* tg ** 

****

*gx*2



Выводы:

1. Состояние свободной механической системы в любой момент

#### 

времени полностью определяется заданием радиусов-векторов

*ri* (*t*) и

скоростей **i

всех частиц, входящих в эту систему (или заданием её 3n

координат

*x1 , y1 , z1 , x2 , y2 , z2 ,* *, xn , yn , zn*

и *3n* проекций скоростей

*x**1 , y**1 , z**1 , x**2 , y**2 , z**2 ,* *, x**n , y**n , z**n* , где *n* – число частиц системы) .

Это означает, что заданием координат и скоростей частиц в некоторый момент времени однозначно определяются и их ускорения

*x**1 ,* *y**1 ,* *z**1 ,* *x**2 ,* *y**2 ,* *z**2 ,* *,* *x**n ,* *y**n ,* *z**n*

в этот момент, необходимые для

предсказания поведения системы в последующие моменты времени. Однако в отличие от координат и скоростей ускорения частиц нельзя задавать произвольно, так как они определяются уравнениями движения (1.2.1).

1. Заданием начального состояния механической системы однозначно определяется её поведение и во все последующие моменты времени.

Это означает, что если заданы условия движения системы, т.е.

заданы силы

*Fi* (*ri* ,*i* , *t*) , действующие на отдельные частицы системы,

как функции их координат, скоростей и времени, то по начальному состоянию системы в момент *t*=0 можно однозначно предсказать её состояния и во все последующие моменты *t>*0. Заметим, что физической

основой предсказания механических состояний системы является

#### 

линейность уравнений движения (1.2.1) относительно ускорений

*ri* .

Сформулированное утверждение представляет собой *принцип причинности классической механики*, или так называемый, *принцип лапласовского детерминизма*, т.е. частную формулировку общего принципа причинности, справедливую только в рамках классической механики.

* 1. Работа силы и потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле

По определению, элементарная работа силы *F*

*A* 



*Fdr* . (1.3.1)

Полная работа на пути 1→2 есть

*A*     *F dx*  *F dy*  *F dz*

(1.3.2)

*Fdr*

12

*x y z*

12

В том случае, если значение криволинейного интеграла (1.3.2) не зависит от вида кривой 12, можно записать

#### 

##### Fdr

 *dU* (*x*, *y*, *z*)

(1.3.3)

При этом работа будет равна

2

*A*   *dU* (*x*, *y*, *z*)  *U* (*x*1, *y*1, *z*1 ) *U* (*x*2 , *y*2 , *z*2 ) . (1.3.4)

1

В общем случае элементарную

###### 

работу

*Fdr*

нельзя

Рисунок 1.2 – Работа силы на пути 1→2

представить в виде (1.3.3); поэтому мы обозначим её через

*A* , тем самым подчеркивая,

что элементарная работа (1.3.1) в общем случае не является полным дифференциалом.

Поля, удовлетворяющие

(1.3.3) или (1.3.4), называются потенциальными силовыми полями, а

функция *U* (*x*, *y*, *z*) – потенциальной энергией частицы во внешнем

#### 

потенциальном силовом поле. По заданной силе

*F* (*r* ) , действующей на

частицу, её потенциальную энергию можно найти с помощью неопределённого интеграла

(1.3.5)

*U* (*r*)   *F* (*r* )*d*





*r*  *C*



Видно, что потенциальная энергия частицы определена с точностью до произвольной аддитивной постоянной *C*. Поэтому, прежде чем работать с

функцией

*U* (*r* )

как с потенциальной энергией частицы, её необходимо

предварительно прокалибровать, выбрав произвольным образом нулевой уровень потенциальной энергии (этот произвол в выборе постоянной *C* не

сказывается на значении вектора силы *F* и интеграла работы (1.3.4)). Из соотношения (1.3.3) следует, что

*F x dx*

откуда

 *F y dy*

 *F z dz*

  *U*

####   

  *x*

*dx*   *U*

 *y*

*dy*   *U*

 *z*



*dz*  ,

#### 

*Fx* 

  *U* ,

 *x*

*F y* 

*  *U*

 *y*

, *Fz*

   *U* .

 *z*

В векторной форме

#### 

*F*  grad*U*

где обозначено

####  *U*

  *U*

##### r

 , (1.3.6)

*U*

#### 



##### r

Отсюда видно, что

*U*

*U*  *U*

*x i*  *y*



#### 

 *U* 

*j*  *z k* .

 *dr r*



 *dU* .

Равенствами (1.3.5) и (1.3.6) устанавливается взаимно однозначное

соответствие между скалярным полем, определяемым функцией *U* (*r* ) , и

#### 

потенциальным силовым полем *F* (*r* ) . В каждой точке поля вектор силы

*F* направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону убывания потенциальной энергии.

*U* (*r* )  *const*

Условие потенциальности можно записать и в дифференциальной форме





*L*

*F* (*r dr*

 

)  0

(интеграл работы не зависит от формы пути); отсюда по теореме Стокса

 rot *FdS*  0 ,

и ввиду произвольности поверхности *S*, натянутой на контур *L*,

rot *F*  0

Таким образом, потенциальное силовое поле – это *безвихревое поле.*

## Законы сохранения и основные теоремы динамики

* 1. Первые интегралы уравнений движения и законы сохранения

Состояние движения свободной механической системы, как было показано выше, полностью определяется заданием *3n* декартовых координат и *3n* проекций скоростей всех частиц, входящих в данную систему

*x*1*, y*1*, z*1*, x*2 *, y*2 *, z*2 *,*  *, xn, yn , zn*

*x* *, y* *, z* *, x* *, y* *, z* *,*  *, x* *, y* *, z*

(2.1.1)

 1 1 1 2 2 2

*n n n*

В процессе движения системы переменные (2.1.1) изменяются. Тем не менее можно указать такие функции

     

*f* (*r*1 , *r*2 ,..., *rn* ;**1 ,**2 ,...,*n* ; *t*) 

*f* 0

(2.1.2)

параметров (2.1.1) и, в общем случае, времени *t*, которые при движении

системы сохраняют постоянные значения условиями.

*f* 0 , определяемые начальными

Функции (2.1.2) называются *первыми интегралами*

*дифференциальных уравнений движения* (или, короче, *интегралами движения*). В том, что такие функции действительно могут существовать, можно убедиться на следующих примерах.

***Пример 1 –*** Рассмотрим движение частицы массой *m* и зарядом *q* в переменном электрическом поле

*E*  *E* 0 cos *t* ,

где

*E*0 – постоянный вектор.

Пренебрегая силой тяжести, запишем векторное уравнение движения

частицы в виде

*m*  *qE*

0

cos * t*

или

*d*    

 *m*  *qE*0 sin *t*   0 . (2.1.3)

*dt*  ** 

Отсюда следует, что

*m*  *qE*0 sin *t* 

##### 



*A*0 , (2.1.4)

где

*A*0 – постоянный вектор, определяемый начальными условиями.

Полученная векторная функция (2.1.4) является первым интегралом движения для заряженной частицы, движущейся в переменном электрическом поле.

***Пример 2 –*** Рассмотрим поведение той же частицы в однородном

магнитном поле

*B=*const.

*B*  *Bk* , *k* – орт оси *Oz* декартовой системы координат и

Запишем уравнение движения частицы

*m d*  *q*** 

*B*  *Bk*

*dt B* ; ,

умножим уравнение движения скалярно на **

(** ) 

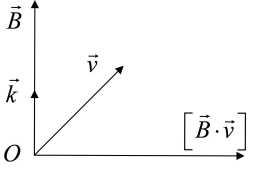
*q* *B*  0 *=>*  *const* .

##### m d 2

2 *dt*

  *m* 2

#### 2

Далее умножим уравнение движения

скалярно на *k*

*m dz* 

**  0

*qk B =>*

##### dt

*mz*  *const* .

Рисунок 2.1 – Частица в однородном магнитном поле

Таким образом, для заряженной частицы, движущейся в однородном магнитном поле, первыми

интегралами движения являются её кинетическая энергия и проекция импульса на направление поля.

Общее число *S* независимых первых интегралов движения свободной механической системы *≤6n*, причём максимальное число интегралов *6n* существует у такой системы, для которой возможно полное разделение переменных в дифференциальных уравнениях движения. Действительно, в этом случае общее решение динамической задачи может быть

представлено в виде

####  



*ri ri* (*t*;*C*1 ,*C*2 ,..,*C*6*n* )

#### (*i*  1,2,..., *n*)

, (2.1.5)

где *C1, C2,…, C6n* – произвольные постоянные интегрирования.

Дифференцируя (2.1.5) по *t*, получим ещё *n* векторных равенств вида

**  ** (*t*; *C* , *C* ,.., *C* )

*i i* 1 2 6*n*

#### (*i*  1,2,..., *n*)

. (2.1.6)

Решая систему уравнений (2.1.5) и (2.1.6) относительно постоянных интегрирования *C* , находим

*C* (*t*; *r*1 , *r*2 ,..., *rn* ;**1 ,**2 ,...,*n* )  *C*

0

где

(*i*  1,2,...,6*n*)

, (2.1.7)

#### *C*       

** 0 *C* (*t*0 ; *r*10 , *r*20 ,..., *rn*0 ;**10 ,**20 ,...,*n*0 )

(2.1.8)

Однако далеко не всегда первые интегралы движения выполняют одинаково важную роль в механике. Среди них есть несколько таких интегралов движения, постоянство которых имеет весьма глубокое происхождение, связанное со свойствами *симметрии пространства и времени – их однородностью и изотропностью.*

Указанные первые интегралы движения, имеющие вид

####      

*f* (*r*1 , *r*2 ,..., *rn* ;**1 ,**2 ,...,*n* ) 

**

0

*f* , (2.1.9)

выделяют в особую группу и называют *законами сохранения*.

В математике известна теорема Нётер. Смысл этой теоремы – в том, что всякой симметрии пространства или времени отвечает какой-нибудь закон сохранения.

* 1. Закон сохранения механической энергии

Закон сохранения механической энергии можно сформулировать следующим образом: механическая энергия сохраняется в процессе движения у замкнутых механических систем и систем, находящихся в стационарных потенциальных силовых полях; указанный закон сохранения является следствием однородности времени.

Действительно, для любой механической системы, относящейся к одному из двух названных классов, можно ввести понятие о полной потенциальной энергии. У замкнутых механических систем она состоит из внутренней потенциальной энергии парного взаимодействия частиц

####   

(*i*)

1 *n n*  

*U* (*r*1 , *r*2 ,..., *rn* )  *U*

 2 *Uij* ( *ri*

 *rj* ) . (2.2.1)

*i*1

*j*1 *j**i*

Вследствие однородности времени (физической эквивалентности различных его моментов по отношению к замкнутой механической системе) потенциальная энергия (2.2.1) не может быть явной функцией *t*.

Полная потенциальная энергия системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, складывается из её внутренней части

*U* (*i* )

и внешней части

*U* (*e*) , описывающей взаимодействие системы с

внешним силовым полем. Но так как внешнее поле стационарно, то полная потенциальная энергия такой системы не является явной функцией *t*, т.е.

####   

(*e*)

(*i*)

*n*

(*e*)



1 *n n*  

*U* (*r*1 , *r*2 ,..., *rn* )  *U*

* + *U*  *Ui*

(*ri* )  2 *Uij* ( *ri*

 *rj* ) . (2.2.2)

*i*1

*i*1

*j*1

*j**i*

Из выражений (2.2.1) и (2.2.2) видно, что полную производную по *t* от потенциальной энергии, как замкнутой системы, так и системы, находящейся в стационарном потенциальном силовом поле, можно

записать в виде

*dU n*

*U*  *n*  *U*

 

*dt*



*i*1

 *ri*  **~~~~

*ri i*1 *ri*





*t*

*i*

. (2.2.3)

Заметим, что если бы время не обладало свойством однородности (т.е. можно было бы опытным путём установить физическое неравноправие различных моментов времени), то это неизбежно привело бы к явной зависимости от *t* потенциальной энергии любой из рассматриваемых нами систем, при этом в полную производную пришлось бы дополнительно

включить частную производную *U*

*t* .

Запишем систему дифференциальных уравнений движения для рассматриваемого случая

*m d  i*

*i dt*

 *U*

######   



*rr*

. (2.2.4)

( *i* 

###### 1, 2 ,..., *n* )

Умножим *i-*е уравнение системы (2.2.4) скалярно на очевидное равенство

*i*

** и учтём

 *d * *d*  *m * 2 

*mi i*

*i*  *i i* 

(2.2.5)

*dt dt*  2 

и получим новую систему уравнений

*d*  *m * 2 

  *U*

*i i*  

* i*~~~~

*dt*  2 

 *rr*

, (2.2.6)

(*i*  1, 2 ,..., *n* )

равносильную системе (2.2.4). Сложим почленно уравнения (2.2.6)

*d*  *n m * 2 

*n*   *U*

 *i i*  

  * i*~~~~

, (2.2.7)

*dt* 

*i* 1 2 

*i* 1

 *ri*

с учётом (2.2.3) получим

*d*  *n m * 2 

 *i i*  *U*  

0 . (2.2.8)

*dt*  *i* 1 2 

Уравнение (2.2.8) показывает, что в процессе движения у замкнутой механической системы и системы, находящейся в стационарном потенциальном поле, сохраняется скалярная величина

. (2.2.9)

*i*1

*i i*

2

2



*m *  *U*  *const*

*n*

*E*  1 

Величина (2.2.9) называется *полной механической энергией системы*; она складывается из двух существенно различных членов: кинетической энергии

*T*  1 

*n*

*m * 2

2 *i* 1

*i i* , (2.2.10)

зависящей от скоростей частиц, и потенциальной энергии *U*, зависящей от их координат. Нетрудно видеть, что полная энергия обладает свойством аддитивности: если пренебречь взаимодействием частиц, то полную энергию замкнутой системы и системы, находящейся в потенциальном

силовом поле, можно представить в виде

*n*

*E*  

*i* 1

*E i* ;

*Ei* 

*m * 2

*i i*  *U*

#### 2

( *e* ) 

( *ri* ) , (2.2.11)

где *Ei*

– полная механическая энергия отдельной частицы.

Механические системы, у которых полная энергия сохраняется, принято называть *консервативными.*

Закон сохранения (2.2.9) для консервативной системы следует понимать и как закон превращения механической энергии, так как в процессе движения такой системы происходит непрерывное превращение её кинетической энергии в потенциальную и обратно. В этом отношении

закон сохранения (2.2.9) является частным случаем всеобщего закона сохранения и превращения энергии различных форм.

* 1. Закон сохранения импульса для замкнутой механической системы

У замкнутой механической системы из *n* частиц во всё время движения сохраняется вектор

 *n* 

*p*  *mii* ,

*i*1

называемый вектором импульса системы; данный закон сохранения является следствием однородности пространства.

Однородность пространства означает, что при параллельном

переносе системы на любой вектор ** , определяемый выражением

####  





*ri ri*

 **

её физические характеристики не изменяются.

Запишем формальное изменение потенциальной энергии системы

*U* (*r*1 ,.., *rn* )

при таком переносе

*U* 

*n* *U*

  ** *n*

*U*  0

  *ri*  

*i*1 *ri*

*i*1

*ri*

на основании однородности пространства. Отсюда (при произвольном ** )

*n* *U*  0

  . (2.3.1)

*i*1 *ri*

Уравнение движения для *i*-й частицы

*m di*

*i dt*

  *U*

*ri*



; *i*=1*,*2*,…,n*. (2.3.2)

Сложим для всех частиц

*d*  *n*

*m *

  *n*

*U*  0

откуда



*dt*  *i*1

*i i* 

#### 

 ,

*i*1 *ri*



. (2.3.3)

*i*1



*i i*

*n*





*p*  *m*  *const*

Векторное равенство (2.3.3) равносильно трём скалярным соотношениям

#### 

*p*

*n*

 

 *x*

 *i*1

*mi x**i*

 *const*

#### 

*p*

*n*





 *y*

 *i*1

 *n*

*mi y**i*

 *const*

. (2.3.4)

 *pz*

#### 

  *mi z**i*

*i*1

 *const*

Таким образом, помимо энергии *E*, у замкнутой механической системы имеются ещё три интеграла движения, связанных с однородностью пространства.

Из определения вектора *p* следует его аддитивность независимо от наличия или отсутствия взаимодействия между частицами системы (этим импульс отличается от энергии *E*).

Закон сохранения импульса связан с 3-м законом Ньютона. В самом

деле, для замкнутой системы

 *U n* 

*Fi*  

   *Fij*

*i i*1



*r*

*i* *j*

(2.3.5)

есть сила, действующая на *i*-ю частицу со стороны остальных частиц системы. Тогда равенство (2.3.1) примет вид

*n n* 

 *Fij*

 0 . (2.3.6)

*i*1

*j* 1 *i* *j*

В частности, для системы, состоящей из двух частиц, будем иметь

*F*12

 *F*21 , то есть известный закон равенства действия и

противодействия. Следовательно, равенство (2.3.6) есть *обобщение 3-го закона Ньютона на случай системы, состоящей из многих частиц*. Заметим, что равенство (2.3.6) выполняется как для замкнутой, так и для незамкнутой механической системы: поведение внутренних сил не может зависеть от внешних воздействий на систему.

Импульс незамкнутой механической системы не сохраняется. В этом

случае выполняется *закон изменения импульса*

 *n* 

*dp*   *F* (*e*) . (2.3.7)

*i*

*dt*

*i*1

Чтобы получить соотношение (2.3.7), продифференцируем вектор

 *n* 

*p*   *mii* , для незамкнутой системы по *t* и используем формулу (2.3.6)

*i*1

 *n d* *n* 

*n n*  *n* 

*dp*   *m i*

  *F* (*e*)   *F*

  *F* (*e*) .

*dt i*1

*i dt*

*i*

*i*1

*i*1

*ij*

*j*1 *i* *j*

*i*

*i*1

* 1. Закон сохранения момента импульса для замкнутой механической системы

При движении замкнутой механической системы из *n* частиц сохраняется вектор

 *n*   *n*  

*L*  *ri pi*   *ri mii* ,

*i*1 *i*1

называемый вектором момента импульса системы; данный закон сохранения является следствием изотропности пространства.

Изотропность пространства означает, что при повороте механической системы как целого на любой угол ** вокруг произвольной

оси никакие физические характеристики системы не изменяются.

Произведём над системой такой поворот. Из рисунка 2.3 видно, что

  

  

*ri*  *ri* ** ;

*ri*  *ri* ; *ri*

 ** . Следовательно

####   

*ri*  **  *ri*  . (2.4.1)

Запишем формальное изменение потенциальной энергии системы при повороте на угол **

 *n* *U* 

*n* *U*  

*U*   

*ri*

  ~~~~

**  *ri* . (2.4.2)

*i* 1 *ri*

*i* 1

*ri*

Как известно, смешанное произведение векторов допускает циклическую перестановку

сомножителей

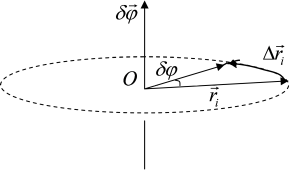
     

Рисунок 2.2 – К закону сохранения момента импульса

*a*[*bc* ]  *c*[*ab* ]  *b*[*ca* ] .

С учётом этого свойства можем переписать (2.4.2) в виде

######   

*n*

 *U* 

*U*  ** 

*ri*     0

*i*1 

*ri* 

на основании изотропности пространства. С учётом произвольности угла

** получаем отсюда

*n*

# 

*i*  1

   *U*

 *ri* 





 *ri*



 0 . (2.4.3)



#### 

Запишем для *i*-й частицы 2-й закон Ньютона (уравнение движения)

###### 

*pi*   *U*



*t ri*

, (2.4.4)

*i*  1,2,..., *n*

###### 

и умножим (2.4.4) векторно на *ri*

слева

###### 



  *p i* 



 *r* 

 

######    *r*

 *U* 

###### ~~~~ 



 *i*  *t*

  *i*

 *ri*

 . (2.4.5)

###### *i*  1, 2 , ..., *n*

Чтобы преобразовать левую часть (2.4.5), воспользуемся тождеством

*d*  



  *ri*  









*pi*  









*pi* 





. (2.4.6)

*dt ri pi*   *pi*  *t*   *ri* 

*t*   *ri* 

*t* 

Учитывая (2.4.6), перепишем (2.4.5) в виде

*d*    *U* 

*dt* *ri pi*    *ri*  

 , (2.4.7)

 *ri* 

и просуммируем (2.4.7) по *i* от 1 до *n* с учетом (2.4.3), тогда

*d*  *n*    *n*  *U* 

*dt*  *ri pi*   *ri*  

  0 ,

или

 *i* 1

 *i*1 

*ri* 

. (2.4.8)

*L*

*dt*

*dL*  0    *const*

Векторное равенство (2.4.8) равносильно трём скалярным соотношениям

*L*  

*n*

*m* ( *y z*

* z y

)  *const*

 *x*

 *i* 1

*n*

###### 

*L*





 *y*

 *i* 1

 *n*

*i i i*

*mi* (*zi x**i*

*i i*

* *xi z**i*

)  *const*

. (2.4.9)

*Lz*

###### 

  *mi* (*xi y**i*

*i* 1

* *yi x**i* )  *const*

Таким образом, помимо энергии *E* и трёх проекций импульса, замкнутая механическая система обладает ещё тремя интегралами движения (2.4.9), вытекающими из изотропности пространства, так что в целом у замкнутой механической системы существует семь первых интегралов, связанных с симметрией пространства и времени.

Вектор момента импульса механической системы по самому своему определению аддитивен

 *n* 

где

*L*   *Li* ,

*i*1

######  

 

*Li ri pi*

. (2.4.10)

Закон сохранения (2.4.8) для замкнутой системы можно считать следствием 3-го закона Ньютона. Чтобы в этом убедиться, обратимся к соотношению (2.4.3), переписав его в виде

*n*

*n*

   

*n*

  *U*

   

######      

 *ri*

    *ri*

*Fij* 

0 . (2.4.11)

*i*  1 

*ri* 

*i*  1

*j*  1

*j*  *i*

Векторные величины вида   *F* 

называются *моментами сил*.

*ri ij*

Поэтому равенство (2.4.11) означает, что векторная сумма всех моментов внутренних сил, действующих в системе (как замкнутой, так и незамкнутой), равна нулю. Это утверждение есть прямое следствие 3-го закона Ньютона.

Рассмотрим равенство (2.4.11). Заметим, что в это равенство

моменты внутренних сил входят только парами типа

*M*    *F*    *F* 

(2.4.12)

*ij ri ij rj ji*

Однако внутренние силы, действующие в системе, удовлетворяют 3-му закону Ньютона

*Fij*

и

 *Fji*

######  

(2.4.13 )

*Fij*

|| (*ri*

 *rj* ) . (2.4.14)

Следовательно, каждая пара моментов сил (2.4.12) обращается в 0

*M*       0 .

*ij* (*ri*

*rj* )*Fji*

Таким образом, равенство (2.4.11) и закон сохранения момента импульса для замкнутой механической системы можно рассматривать как следствия 3-го закона Ньютона.

Рассмотрим теперь *незамкнутую* механическую систему. Для таких систем, очевидно, полный момент импульса сохраняться не будет. Для подобных систем справедлив *закон изменения момента импульса*, записываемый в виде

где

*M*  

, (2.4.15)

 (*e*) 

*M*

*dt*

*dL*  

*n*

*i*1

*ri Fi* 

(2.4.16)

есть результирующий момент внешних сил, действующих на систему.

Для доказательства утверждения (2.4.15) продифференцируем вектор

*L* по времени

*dL d n*  

*n*    

*n*   

*n*   

 *r p*    *dri*

*p*   *r*

*i*

*dpi*   *r*

*i*

*dpi*

 . (2.4.17)

dt dt

*i i*

*i*1

*i*1

 *dt i* 

*i*1 

*dt* 

*i*1 

*dt* 

Запишем уравнение движения для *i*-й частицы

  *n* 

*dpi dt*

 *F* (*e*)   *F*

*j*1 *j**i*

*i ij*

. (2.4.18)

#### *i*  1, 2,..., *n*

Умножим (2.4.18) векторно на и при этом учтём (2.4.17)

###### 

*ri* слева и просуммируем по всем частицам,

*dL*  *n*

 ( *e*) 

   

   (*e*)  

*dt i* 1

*ri Fi*

 

*i* 1

*n*

*n*

*j* 1 *j* *i*

*ri Fij*  

*i* 1

*n*

*ri Fi*

  *M* .

Соотношение (2.4.15) доказано.

Рассмотрим важную разновидность силовых полей – *центрально симметричное (или центральное) поле*. Так называют силовое поле, в

каждой точке которого вектор силы, действующей на частицу, направлен

###### 

вдоль или против радиуса-вектора *F* || *r* , *О* – силовой центр (центр поля).

Нетрудно убедиться, что, двигаясь

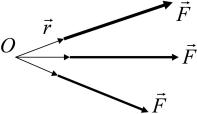


Рисунок 2.3 – Центрально симметричное поле

в таком поле, частица будет сохранять не только свою механическую энергию *E*, но

и вектор момента импульса *L*

*r*  *r*  *r*  *mr*  *m**r*  *r*  *r*  *F* .

dt

Последнее слагаемое тоже равно нулю,

###### 

поскольку в центрально-симметричном поле

*F* || *r*

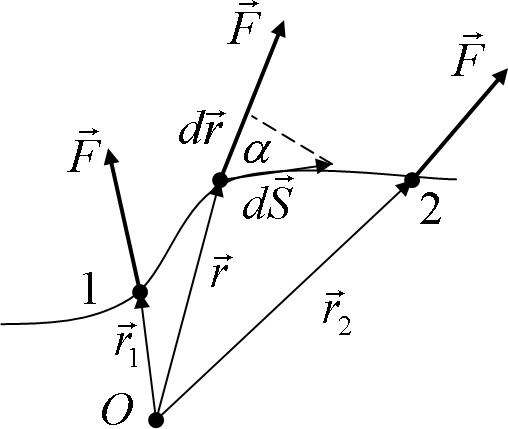
. Следовательно, *во*

*всяком центрально-симметричном поле*

*L*  *const* .

Центрально-симметричное поле обладает ещё одним важным свойством: движение любой частицы в таком поле происходит в одной, фиксированной плоскости. Чтобы в этом убедиться, найдём скалярное

произведение

*r*  *L* 

*mr* *r r* 

*mr* *r r*   0 .

Значит, в любой точке поля



*r*  *L*. А так как *L*  *const* , то

Рисунок 2.4 – Потенциальный характер центральных сил

траектория частицы в центрально-симметричном поле есть *плоская кривая*, лежащая в той же плоскости,

что и силовой центр *О*.

Силы, действующие на частицу в центрально-

симметричном поле, всегда *потенциальны*. В самом деле, рассмотрим элементарную работу таких сил на бесконечно малом перемещении *ds* (рисунок 2.5)

*dA*  *Fds*  *Fds* cos**  *Fdr* .



Модуль *F* зависит только от *r*, поэтому работа на конечном пути 1-2

где

*F* (*r*)

2

*A*12   *F* (*r*)*dr* ,

1

– некоторая скалярная функция *r*.

Выражение для *A*12 зависит только от вида функции

*F* (*r*)

и от

значения *r*1 и *r*2, но не от формы траектории, а это и означает, что центрально-симметричное поле – потенциально. Потенциальная энергия в таком поле равна

*U*   *F* (*r*)*dr*  *C*  *U* (*r*) ,

т.е. зависит только от расстояния *r* до центра поля.

## Применение законов сохранения и основных теорем динамики к интегрированию уравнений движения

* 1. Одномерное движение

Рассмотрим движение частицы вдоль оси *x*. Полная энергия частицы:

*E*  *Ek*  *U*

 *m* 2

2

 *U* (*x*) 

*mx*2

###### 2

* *U* ( *x*)

Так как всегда

*Ek*  0 , то должно выполняться неравенство

*E*  *U* (*x*) .

Этим неравенством определяется область изменения координаты *x*, т.е. та

область, в которой может находиться частица. В область, где она попасть не может.

*E*  *U* (*x*) ,

Итак, движение частицы может происходить лишь в тех областях

пространства, где

*E*  *U* .

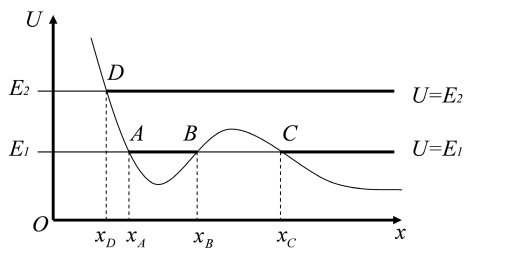
Пусть, например, зависимость *U(x)* имеет вид, показанный на рисунке 3.1.

Рисунок 3.1 – Типы одномерного движения в потенциальном поле

В 1-м случае движение может происходить только в интервале

*xA*  *x*  *xB* и

*xC*  *x*   . Область *AB* называется потенциальной ямой;

*BC* – потенциальным барьером. Точки *A*, *B* и *C*, где

*E*  *U* , называются

точками остановки, так как в этих точках кинетическая энергия и скорость частицы обращаются в 0.

В области *AB* частица будет совершать *финитное движение*, т.е. движение, происходящее в ограниченной области пространства. Она окажется запертой в потенциальной яме и будет лишь совершать

колебания между крайними точками

*xA* и

*xB* .

Если же частица находится в области

*x*  *xC*

и движется налево, то

она, достигнув точки

*xC* , повернёт обратно и уйдёт в бесконечность. Такое

движение называется *инфинитным*.

Если частица обладает полной энергией

*E*2  *E*1 , то для неё будет

доступна вся ось *x* правее точки

*xD* , и движение в этой области будет

инфинитным. В частности, у частицы хватит кинетической энергии на то, чтобы преодолеть потенциальный барьер *BC* и уйти на бесконечность.

Вычислим период одномерного финитного движения. Для этого проинтегрируем уравнение

*mx* 2

###### 2

 *U* (*x*)  *E* ,

*x*  *dx*

dt

разделим переменные



*dx*  *dt*

2 (*E*  *U* (*x*))

*m*

2 (*E*  *U* (*x*))

*m*

,

,

*dt*  .

*m dx*

2 *E* *U* (*x*)

Для частицы в потенциальной яме период будет равен удвоенному

времени прохождения от *xA* до *xB*

.

* *C*

*E*  *U* (*x*)

*dx*

*xB*

*T*  2*m* 

*xA*

* 1. Задача двух тел

Рассмотрим задачу о движении системы, состоящей из двух взаимодействующих частиц (материальных точек); она допускает полное решение в общем виде. Но прежде чем решать задачу, покажем, каким образом её можно существенно упростить.

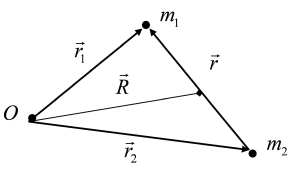


Рисунок 3.2 – Движение двух взаимодействующих частиц

Задача о движении двух материальных точек упрощается, если разложить это движение на два: движение центра инерции и движение частиц относительно него. Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц зависит только от расстояния

между ними, т.е. от модуля

разности их радиусов-векторов

*U*  *U* (*r*) 

 

*U* ( *r*1 *r*2 ) .



Запишем закон сохранения механической энергии



 2

*E*  *m*1*r*1

#### 2



* + *m*2 *r*2

 2

#### 2

 *U* (*r*)  *const* . (3.2.1)

Центр масс системы

 *m*1*r*1  *m*2 *r*2

*R*  *m*  *m* .

####    

1

2

Заменим переменные *r*1, *r*2  на *r* , *R* 

######   

*r*1  *r*2  *r*

######   

 . (3.2.2)

*m*1*r*1  *m*2 *r*2

 (*m*1  *m*2 )*R*

###### 

Выразим из этих уравнений

*r*1 и *r*2

###### 

*r*1

###### 





 *m*

 *R* 2

*m*1  *m*2

 *m*1



r

 . (3.2.3)

*r*2

 *R* 

*m*1

*r*

* *m*2

Дифференцируя (3.2.2) по времени, находим

######  

*m*2 

*r*1  *R*  *m*  *m r*

######  



1 2

*m*1  . (3.2.2’)

*r*2

 *R* 

*m*1

*r*

* *m*2

Подставим (3.2.2’) в (3.2.1)

*m*   *m*  2

*m*   *m* 2

*m*  *m*

  2

*E*  1  *R* 2 *r*   2  *R* 1 *r*   *U* (*r*)  1

2 *R* 

2  *m*1  *m*2  2  *m*1  *m*2 2

 2

  *m*1*m*2



 *r*  *U* (*r*) 

 2

*MR*



##### mr

 2

 *U* (*r*).

2 *m*1  *m*2 2 2

Здесь введены обозначения:

*M*  *m*1  *m*2

– полная масса системы;

*m*  *m* 1 *m* 2

– приведённая масса системы.

*m* 1  *m* 2

Мы видим, что в новых переменных кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии фиктивной частицы массой *M*, расположенной в центре масс исходной системы, и кинетической энергии фиктивной частицы массой *m*, движущейся относительно начала с

радиусом-вектором *r* . Перейдём теперь в Ц-систему отсчёта Выражения (3.2.3) и (3.2.2’) в этой системе отсчёта примут вид

*R*  0 .

###### 

*r*1

###### 

*m* 

r



2

*m*1  *m*2

###### 



*r*2

  *m*1 *m*1  *m*2

 , (3.2.4)

r



*r* 

 1

###### 

*m* 

r



2

*m*1  *m*2

###### 

*r*

 2

  *m*1 *m*1  *m*2

 . (3.2.5)

r



Полная энергия системы теперь запишется в виде:

#### 

 2

##### mr

*E*  2  *U* (*r*) . (3.2.6)

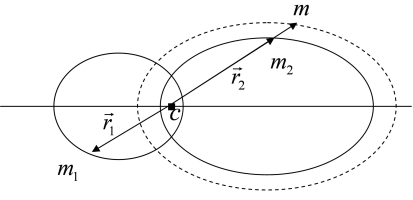


Рисунок 3.3 – Движение в центральном поле.

Случай притяжения тел при

*m1*  *m*2

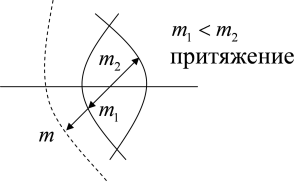


Рисунок 3.4 – Движение в центральном поле. Случай

притяжения тел при

*m1*  *m*2

Мы видим из (3.2.6), что задача свелась к одночастичной: надо искать движение одной (правда, фиктивной) частицы массой m относительно центра масс исходной системы. Фактически, соотношение (3.2.6) есть энергия частицы *m* в *центрально-симметричном поле U(r).*

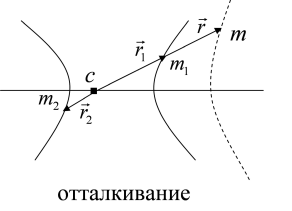


Рисунок 3.5 – Движение в центральном поле. Случай отталкивания

######    

Из (3.2.4) находим:

*r*1  *r*2 , причём *r*1 *r*2

  *m*2

*m*1 . Это значит,

что движение частиц m1 и m2 происходит по геометрически подобным

траекториям. Аналогично из (3.2.5) для скоростей имеем **  ** и

1

2

**1   *m*2 .

**



2 *m*1

Примерный вид траектории показан на рисунке 3.3 - 3.5.

* 1. Движение частицы в центрально-симметричном поле

Нам известны следующие свойства ЦС поля:

1. движение любой частицы в таком поле происходит в одной фиксированной плоскости;
2. у частицы, движущейся в ЦС поле, сохраняется момент импульса *L* ;
3. ЦС силовое поле потенциально, причём *U=U(r)*, где *r* – расстояние до центра поля.

Отсюда следует и то, что полная механическая энергия частицы в ЦС поле будет сохраняться.

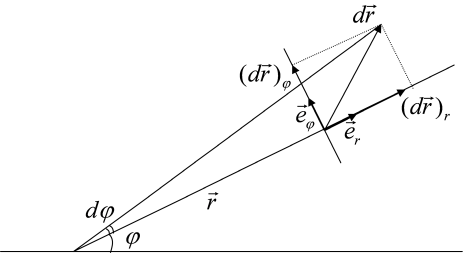


Рисунок 3.6 – Вектор *dr* элементарного перемещения частицы в

полярных координатах

Учитывая сказанное, будем решать задачу о движении частицы в ЦС поле, исходя из законов сохранения энергии E и момента импульса *L* .

С учётом симметрии задачи, её целесообразно решать не в прямоугольной,

а в *полярной* системе координат.

Пусть *dr* – приращение радиуса-вектора частицы за время *dt* (рисунок

3.6). Имеем

###### 

*dr*  (*dr* ) *r er*

###### 

 (*dr* )* e* , (3.3.1)

где

(*dr* )*r*  *dr* ;

(*dr* )**

 *rd* .

Поэтому

####   

*dr*  *er dr*  *e rd* . (3.3.2)

Разделим (3.3.2) на *dt*

**  *dr*  

*dr*   *dr* ,

откуда

*dt er dt*

*e r dt*

*r*  *dt*

*dr*

 *r* , * *

 *r d*

##### dt

 *r * ,

тогда (3.3.3)

**.** (3.3.4)

**

*r*

** 2  ** 2 ** 2  *r*2  *r* 2** 2

Запишем вектор момента импульса частицы в полярных координатах

*r*  *m*  *m**e r*(*e *

* *e *

) *mr*

*e e* .

*L*   

####   

*r r r  *

 

* r *

Отсюда видно, что вектор *L* всё время перпендикулярен к плоскости движения частицы, а его длина

*L*  *L*

 *mr*

 *mr* 2**  *const* . (3.3.5)

Из (3.3.5) следует

** 

*L*

*mr* 2

. (3.3.6)

Так как правая часть (3.3.6) при любых значениях *r* положительна, то приходим к важному выводу: *частица в ЦС поле движется так, что её координата  монотонно возрастает.*

Запишем закон сохранения механической энергии с учётом (3.3.4) и (3.3.6)

*m* 2

*m* 2 2 2

*mr*2 *mr* 2**2

*E*   *U* (*r*)  (*r*  *r * )  *U* (*r*)    *U* (*r*) 

#### 2 2 2 2

 *mr*2  *L*2 



(3.3.7)

2 2*mr* 2

*U* (*r*).

Выразим *r* из (3.3.7)

*dr*  *r* 

*m*

2 

*E*  *U* (*r*)

*L*2

*m*2 *r* 2

##### dt

. (3.3.8)

Разделим переменные в дифференциальном уравнении (3.3.8)

*dt*  *dr*

*m*

2 *E* *U* (*r*)

*L*2

*m*2 *r* 2

, (3.3.9)

откуда после интегрирования получаем

*t*  *dr*  *C*

*m*

2 *E*  *U* (*r*)

*L*2

*m*2 *r* 2

. (3.3.10)

Соотношение (3.3.10) задаёт в неявной форме зависимость *r(t)*, т.е. наполовину решает поставленную задачу. Для полного решения задачи необходимо ещё выяснить закон изменения угла ** .

Воспользуемся формулой (3.3.6)

*d*  **  *L dt mr* 2

*d*  *L*

*mr* 2

,

*dt* . (3.3.11)

Из сопоставления (3.3.9) и (3.3.11) находим

*d* 

##### L dr r 2

,

2*m**E* *U* (*r*) *L*

2

*r* 2

или после интегрирования

. (3.3.12)

*r* 2

* *C*

2

2

2*m**E* *U* (*r*) *L*

*L dr*

*r*

**  

Это соотношение задаёт в неявной форме траекторию частицы в ЦС поле и вместе с формулой (3.3.10) полностью решает поставленную задачу.

Проанализируем найденное решение. Сопоставим интеграл энергии (3.3.7)

*mr*2



##### E

2

* *L*2

2*mr* 2

 *U* (*r*)

с аналогичной формулой для частицы, совершающей одномерное движение

*mx* 2



##### E

2

 *U* (*x*) .

Мы видим, что радиальную часть движения в ЦС поле можно рассматривать как «одномерное движение» в поле с *эффективной потенциальной энергией*

2

*L*

*Uef* (*r*)  2*mr* 2

 *U* (*r*),

(3.3.13)

при этом слагаемое

*L*2 2*mr* 2

называется *центробежной энергией*.

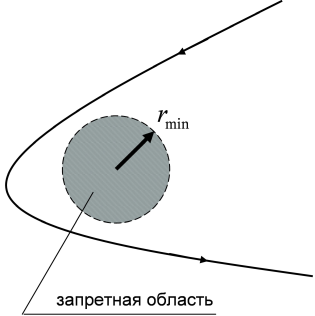
Следовательно, по аналогии с одномерным движением, те значения *r*, при которых имеет место равенство

*L*2

2*mr* 2

 *U* (*r*)  *E*,

(3.3.14)

определяют границы области движения по радиальной координате *r*. Заметим, что это не означает (как в задаче об одномерном движении) остановки частицы, так как

угловая координата **

продолжает монотонно возрастать (см. выше). Таким образом, равенство *E=Uef(r)*, т.е

Рисунок 3.7 – Инфинитное движение в центрально-симметричном поле

*r*  0 , означает *точку поворота*

*траектории*: в этой точке

функция *r(t)* переходит от возрастания к убыванию или наоборот.

Обсудим вопрос о возможных границах движения по координате *r*. Очевидно, что во всех случаях будет ограничение по *r* снизу, так как всегда *r≥*0. Кроме того, в некоторых случаях может быть ограничение по *r* и сверху. Следовательно, могут встретиться две возможности.

1. Радиальная координата ограничена только снизу:

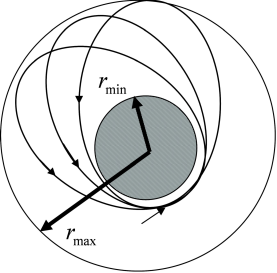
*r*  *r*min

Движение инфинитно, траектория начинается и заканчивается в бесконечности.

1. Радиальная координата *r* ограничена и снизу, и сверху:

*r*min

 *r*  *r*max .

Движение финитно, но траектория в общем случае не замкнута: она бесчисленное множество раз проходит через минимальное и максимальное значение *r* и за бесконечное время заполняет всё кольцо.

Можно показать, что

траектория финитного движения

Рисунок 3.8 – Финитное движение в центрально-симетричном поле

будет замкнутой лишь для двух центрально-симметричных полей:

* + *U* (*r*) ~ *r* 2

(пространственный осциллятор);

* + *U* (*r*) ~ 1

r

(кулоново поле).

* 1. Движение частицы в кулоновом поле

Под кулоновыми полями понимают поля, потенциал которых обратно пропорционален расстоянию и, следовательно, сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния

#### 1 1

*U* (*r*) ~ ,

##### r

*F* (*r*) ~

*r* 2 .

Сюда относят поле гравитационных сил, всегда имеющих характер притяжения, и поле электростатического взаимодействия, которое может быть как притяжением, так и отталкиванием. Решим вначале задачу о движении частицы в кулоновом *поле притяжения*. Запишем

потенциальную энергию в виде *U* (*r*)  * r* , где * >*0 – постоянная.

Найдём границы движения по *r*, для этого запишем эффективную потенциальную функцию

*U* (*r*)   **

*ef r*

*L*2

2*mr* 2 .



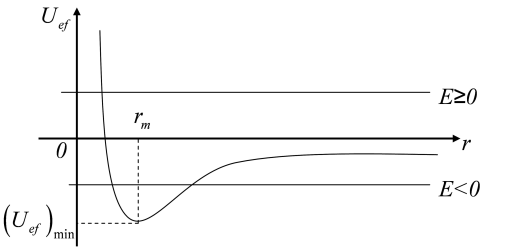
Видно, что при *r→*0 *Uef(r)→*∞, а при *r→*∞ *Uef(r)→*0 со стороны отрицательных значений. График функции *Uef(r)* имеет вид, показанный на рисунке 3.9.

Рисунок 3.9 – Потенциальная энергия притяжения кулонова поля

Минимум

*dUef*

 0 , **  *L*

####  0 ,

2

##### dr rm

2

*L*2

2*mrm*

*rm*  *m*

, (3.4.1)

*m* 2

(*Uef* )min  

2*L*2

. (3.4.2)

где *rm*

*–* радиальная координата, соответствующая минимуму потенциала.

Из графика видно, что при *E≥*0 движение частицы будет инфинитным, при *(Uef)min<E<*0 – финитным. Физически это связано с тем, что в 1-м случае положительная по знаку кинетическая энергия частицы превосходит по модулю отрицательную потенциальную энергию, а во 2-м случае – наоборот.

Получим формулу траектории частицы в кулоновом поле притяжения. Воспользуемся соотношением (3.3.12), подставив в него

явный вид потенциальной энергии *U* (*r*)  **

r . Получим

L dr

*Замена переменной* :

**   *r*

2*m**E*  *r*   *r* 2

 ** 

*L*2

2*mE*  2*mu*  *L*2*u* 2

2

 *u*  1 ;

r

*du*   *dr*

*r* 2

 *Ldu* 

 *под корнем выделим*  *Ldu* 

* *L u*  2*Lu* 

2 2

*m*

*L*



*m*2** 2 *m*2** 2

*L*2



*L*2

* 2*mE*



##### полный квадрат

 *Ldu* 

 *m*2** 2









*m* 2

*L*2

 2*mE*    *Lu* 





*L* 





*x*  *Lu*  *m*

##### L

*a* 2  *x*2

*dx*  *Ldu*

 

*dx* 

 *a*2

 *m*2** 2

*L*2

* 2*mE*

####  arccos *x*

##### a

 arccos

*L*  *m r L*

.

2*mE* 

*m*2** 2

*L*2

Таким образом, уравнение траектории частицы в кулоновом поле притяжения в полярных координатах имеет вид

*L m*



*m*  *L*2 1

  *L*2 1 



####  

*L m r*

####  1

 

*m r*

####  1

cos**

*r L*  

*m*2** 2

*m* 2*EL*2 1 

*L m* 2



 

.

2*EL*2

1 

*m* 2

2*mE* 

*L*2

Введём обозначения

*L*2

1 

2*EL*2

*m* 2

*p*  , *e* 

*m*

. (3.4.3)

Тогда равнение траектории примет вид

*p*  1 *e* cos**

*r*

. (3.4.4)

Из геометрии известно, что (3.4.4) есть уравнение *конического сечения* с фокусом в начале координат *p* и *e* из (3.4.3) называют соответственно *параметром* и *эксцентриситетом* конического сечения.

Для задачи двух тел этот результат означает, что в кулоновом поле каждая из двух взаимодействующих частиц будет описывать коническое сечение, фокус которого (центр поля) совпадает с центром масс системы.

Рассмотрим возможные случаи такого движения:

1. Пусть

 *m* 2

2*L*2

 *E*  0 ,

тогда из (3.4.3) следует, что *e<*1, т.е. орбита частицы является эллипсом и движение финитно (рисунок 3.10).

Из геометрии известны соотношения между полуосями эллипса, его

параметром и эксцентриситетом

1  *e*2

*a* *p* ;

1  *e*2

*b* *p*  *a*

. (3.4.5)

1  *e*2

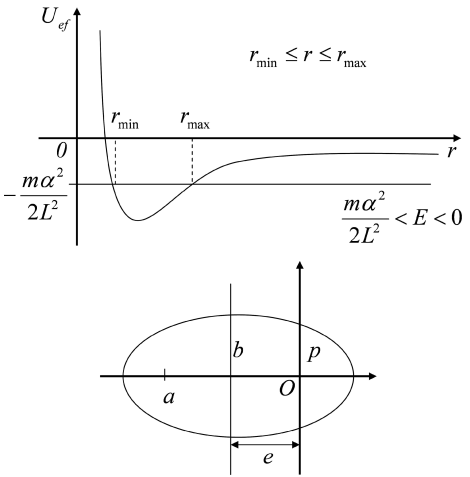


Рисунок 3.10 – Финитное движение в кулоновом поле притяжения

Воспользуемся формулами (3.4.5) и (3.4.3) и выразим полуоси эллипса через физические характеристики частицы – её энергию *E* и момент импульса *L*. Имеем:

*L*2  *m* 2  * *

*a*  *m*

####       ,

2*EL*2 2*E*

2 *E*

(3.4.6)

####  

*L*

1  *e*2

2 *E L*2

*m* 2

2 *E*

**

*L*2

*m*

*b*  *a*

 *a* 

 *a*  

 *a*  . (3.4.7)

*m*

Если

*E*  (*U ef* )min

  *m* 2

2*L*2

, то, как видно из (3.4.3), *e=*0, т.е. эллипс в

этом предельном случае вырождается в окружность. Из (3.4.6) следует, что большая полуось эллипса зависит только от энергии частицы, но не от *L*.

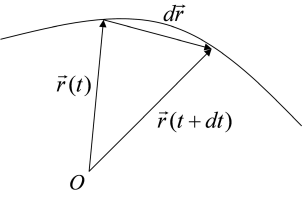
Найдём период обращения частицы по эллипсу. Для этого рассмотрим фрагмент траектории (рис 3.11).

Рисунок 3.11 – Фрагмент траектории частицы

Площадь векторного треугольника равна

*dS*  1 2 

 . Если

rdr

определить вектор элемента площади как *dS*  1 2 , то можно ввести

*rdr*

вектор *секторной скорости* частицы

 *dS*

#### 1   

1   *L*

**  

*r dr*  

*r*  ,

откуда

*dt* 2 

*dt*  2 2*m*

. (3.4.8)

*L*  2*m*

Пусть частица описала один полный эллипс за время *T*. Запишем соотношение (3.4.8) для модулей векторов

*L*  2*m dS* .

##### dt

И, интегрируя по времени от 0 до *T*, получим находим период обращения частицы по эллипсу

*a*

*LT*  2*mab* , откуда

или

*m*

*T*  2*m ab* 

##### L

2*m a L*

 *L* ,

. (3.4.9)

*ma* 32

**

*T*  2**

Период также зависит от энергии, но не от момента импульса.

1. При *E≥*0 движение инфинитно, при этом если *E>*0, то траектория

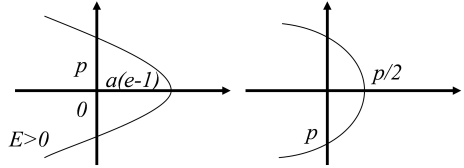


Рисунок 3.12 – Инфинитное коническое сечение в кулоновом поле притяжения

частицы является гиперболой (на основании (3.4.3) *e>*1), а если *E=*0 – параболой (*e=*1). Обе кривые содержат центр поля в фокусе (рисунок 3.12). В последнем случае частица будет двигаться по параболе, если она на бесконечности покоилась ** =0.

Рассмотрим теперь движение частицы в кулоновом поле

отталкивания. При этом

*U* (*r*)  **

*r* , где * >*0 – постоянная. Для определения границ движения по *r* запишем эффективную потенциальную функцию

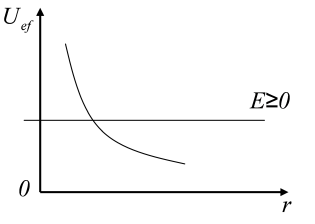
**

*Uef* (*r*)  *r*

*L*2

2*mr* 2 .



Рисунок 3.13 – Потенциальная энергия кулонова поля

показанный на рисунке 3.13.

Её асимптотика

*r→*0 *Uef(r)→*∞, r→∞ *Uef(r)→*0.

График *Uef(r)* имеет вид

Энергия *E≥*0, и движение в кулоновом поле отталкивания всегда инфинитно.

Расчёт траектории частицы в поле отталкивания аналогичен расчёту для поля притяжения. В результате интегрирования получается, как нетрудно убедиться, следующее уравнение траектории в полярных координатах:

. (3.4.10)

*p*  1 *e* cos**

*r*

Это – также коническое сечение, но теперь кривая (гипербола или парабола) оставляет силовой центр *O* снаружи (3.14).

***Пример*** *–* гравитационное поле.

*U* (*r*)   *Gm*1*m*2

##### r

  *GMm* , т.е. ** =*GMm*.

##### r

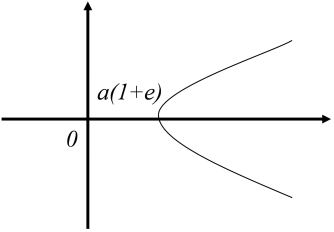


Рисунок 3.14 – Инфинитное коническое сечение в кулоновом поле отталкивания

Имеем

1)

*p*  1  *e* cos**

*r*

– общая формулировка 1-го закона Кеплера.

2) *L=*const, и на основании

(3.4.8)

**  const

Это 2-ой закон Кеплера.

3)

*ma* 32

**

*T*  2**

или, для двух разных масс,

обращающихся независимо друг от друга

вокруг общего силового центра:

2

2

*T* 2 *a*3

*a*3

*T* 2

1  1

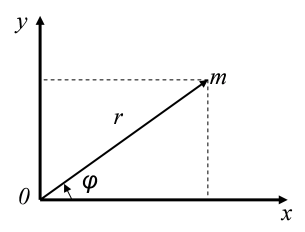
– 3-й закон Кеплера.

Исторически эти законы были сформулированы И. Кеплером в начале XVII в. как результат обработки наблюдательных данных о движении планет Солнечной системы. Впоследствии, исходя из законов Кеплера, И. Ньютон вывел закон всемирного тяготения.

## Основы аналитической механики

* 1. Принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона)

Уравнения Ньютона просты и удобны, если формулировать законы движения в прямоугольных координатах. Но эти уравнения резко усложняются, если от прямоугольных (декартовых) координат перейти к каким-либо другим координатам.

***Пример –*** Движение частицы массой *m* по плоскости при отсутствии внешних сил описывается уравнениями

*m**x*  0

 **** . (4.1.1)

Рисунок 4.1 – Переход к полярным координатам

Пересчитаем производные

*x*  *r*cos**  *r* sin** ** ;

*my*  0

Перейдём от прямоугольных к полярным координатам ( *r*,** )

(рисунок 4.1).

*x*  *r*cos**  *r*sin** **  *r*sin** **  *r* cos** ** 2  *r* sin** ****** ;

*y*  *r*sin**  *r* cos** ** ;

*y*  *r*sin**  *r* cos** **  *r*cos** **  *r* sin** ** 2  *r* cos** ****** .

Тогда уравнения (4.1.1) примут вид

 *r*cos **  *r* sin **  ******  2*r* sin **  **  *r* cos **  ** 2

*r*sin **  *r* cos **  ******  2*r* cos **  **  *r* sin **  ** 2 .



Умножим первое уравнение на

*r*  *r* 2 .

cos ** , а второе на

sin **

и сложим

Теперь умножим первое уравнение на

sin ** , а второе на

cos **

и вычтем

*r*****  2*r*** .

Таким образом, вместо простейших уравнений движения (4.1.1) мы в полярных координатах получили систему уравнений

*mr*****  *mr* 2



*m*****   2*mr*** .

 *r*

Нетрудно представить, насколько громоздко будут описываться более сложные случаи движения, но уже и на этом примере видно, как трудно сформулировать уравнения движения, если возникает потребность записать законы движения в иной, чем декартова, системе координат.

Зададимся вопросом: нельзя ли найти такую формулировку законов

движения, которая не была бы

*B* связана с выбором конкретной



*C'* (например, декартовой) системы

координат? Положительный ответ даёт *принцип наименьшего действия (принцип Гамильтона)*.

*C* Пусть за время от *t*=*t1* до *t=t2*

частица под действием

*A* потенциальной силы

*F*  *U*

Рисунок 4.2 – К определению принципа Гамильтона

перешла из точки *А* в точку *В* по траектории *ACB* (рисунок 4.2):

Уравнение траектории в декартовых координатах

*x=x(t), y=y(t), z=z(t)*, причём по условию

*x(t1) = xA, x(t2) = xB*,

*y(t1) = yA, y(t2) = yB*,

*z(t1) = zA, z(t2) = zB*.

Соединим точки *А* и *В* другой линией *АC’В*; уравнение этой кривой в декартовых координатах:

*x’=x’(t)*, *y’=y’(t)*, *z’=z’(t)*, причём точно так же

*x’(t1) = xA, x’(t2) = xB*,

*y’(t1) = yA, y’(t2) = yB*,

*z’(t1) = zA, z’(t2) = zB.*

Почему же частица пошла по кривой *АCВ*, а не по другой кривой *АC’В*? Чем кривая *АCВ* – действительная траектория частицы – отличается от всех других кривых *АC’В*, соединяющих *А* и *В*? Ответ на этот вопрос также даёт принцип Гамильтона.

**Определение:** Назовём разность кинетической и потенциальной энергий частицы

*L*  *T-U*

её *функцией Лагранжа, или лагранжианом.*

**Определение:** Величина

*t*2

*S*   *Ldt t*1

(4.1.2)

(4.1.3)

называется *действием.*

**Принцип Гамильтона** формулируется следующим образом: частица будет двигаться по такой траектории, для которой величина *S* принимает наименьшее возможное значение.

Минимальность *функционала S* для траектории *АCВ* означает следующее. Пусть мы выбрали траекторию *АC’В* так, что в точках *А* и *В* она совпадает с действительной траекторией *АCВ*, а в промежутке – бесконечно мало отличается от неё. Для этого надо от функций *x(t)*, *y(t)*, *z(t)* перейти к бесконечно мало отличающимся от них функциям *x(t)+δx(t)*,

*y(t)+δy(t)*, *z(t)+δz(t)*. (Величины *δx(t)*, *δy(t)*, *δz(t)* называются *вариациями*

функций *x(t)*, *y(t)*, *z(t)*).

Если на кривой *АCВ* функционал *S* минимален, то при переходе к бесконечно близкой кривой *АC’В* в 1-ом приближении вариация *S* должна обращаться в 0

(4.1.4)

*t* 2

* S*  **  *Ldt*  0

*t*1

– математическая формулировка принципа Гамильтона.

Формально вариацию *S* можно записать в следующем виде

*t*2

*S*  **  *L*( *x*, *y*, *z*, *x*, *y*, *z*, *t*)*dt* 

*t*1

*t*2  *L* *L*

*L*   *L* *L*  *L* 

*S*    *x x*  *y y* 

*z*    *x*  *y* 

*z* *x* *y*

*z* *z* *dt* .

*t*1 

####   

Вторую часть подынтегрального выражения проинтегрируем по частям,

учитывая, что

*d x*  * dx dt dt*

 *x* , тогда

 *L*

 *x*

* x* 

*d* 

#### 

##### dt 

 *L*

 *x*

*x*   *d*

 *dt*



  *L*

####   *x*



*x*

#### 



и т.д.,

в результате мы получим

*t*2  *L* *L*

*L*  *d*  *L*  *d*  *L* 

*S*    *x x*  *y y* 

*z z*   *dt*  *x* *x*  *dt*  *y* *y* 

*t*1 

 *d*  *L* ** 

*L*

 

*L* *L*



*t*2

 

. (4.1.5)

*dt*  *z* 

*z* *dt*   *x* *x*  *y* *y* 

*z* *z*

####    

*t*1

А так как кривые *АCВ* и *АC’В* в начальной и конечных точках совпадают друг с другом, то

*x*(*t*1 )  *y*(*t*1 )  *z*(*t*1 )  0 ,

*x*(*t*2 )  *y*(*t*2 )  *z*(*t*2 )  0 .

В силу этого последний член в (4.1.5) обращается в 0, и остаётся

* t*2 *L d*  *L*  *L d*  *L*  *L*

*d*  *L*  

*S*    *x*  *dt*  *x* *x*   *y*  *dt*  *y* *y*   *z*

 *dt*  *z* *z**dt*

(4.1.6)

*t*1 

######   

  

  

Для экстремальности *S* необходимо, чтобы

*S*  0

при любых вариациях

*x*,

*y*,

*z .* Это имеет место если

.

Эта система получила название уравнений Лагранжа.

 



 *z*  *dt*  *z*   0

 

*L d*  *L* 



*y*  *dt*  *y*   0

*****L d*  *L* 

 

 

*dt* *x*



 *x*

*L*  *d*  *L*   0

Проверим, что из уравнений Лагранжа вытекают уравнения Ньютона. В самом деле,

*T*  *m* ( *x* 2 

#### 2

*y* 2  *z* 2 ),

*U*  *U* ( *x*, *y*, *z* ),

*L*   *U* ,

*x* *x*

*L*   *U* ,

*y* *y*

*L*   *U* ,

*z* *z*

*L*

*x*

 *mx*,

*L*

*y*

 *my* ,

*L*

*z*

 *mz*,

и уравнения Лагранжа сводятся к уравнениям:

 *d*

 *dt*

*mx*    *U* ,

*x*

 *d* *U d*  

 *my*    ,  *m*   *F*

 *dt*



*y dt* ,

 *d*

 *dt*



*mz*    *U* ,

*z*

то есть к уравнениям Ньютона.

Заметим, что вариационный принцип Гамильтона по своему содержанию глубже ньютоновой формулировки законов механики, поскольку он совершенно не зависит от выбора системы координат: понятия кинетической и потенциальной энергии нечувствительны к такому выбору.

* 1. Обобщённые координаты и обобщённые импульсы

Сформулируем теперь вариационный принцип не в декартовой, а в произвольно выбранной системе координат *q1, q2, q3*, которая может и двигаться относительно декартовой. Пусть формулы перехода от декартовой системы координат к новой имеют вид

*x*  *x*(*q*1 , *q*2 , *q*3 , *t* )

 *y*  *y*(*q* , *q*



1 2

, *q*3 , *t* )

, (4.2.1)

*z*  *z*(*q* , *q* , *q* , *t* ),

 1 2 3

а обратные им формулы перехода от новой системы координат к старой

*q*1  *q*1 ( *x*, *y*, *z* , *t* )



*q*



*q*

 2 2

###### 

*q*



*q*

 3 3

( *x*, *y* , *z*, *t* )

( *x*, *y* , *z*, *t* ).

. (4.2.2)

С помощью этих формул каждому значению декартовых координат

*x, y, z* мы однозначно сопоставляем некоторые значения координат *q*.

Нередко встречаются такие механические системы, в которых взаимодействие между телами (частицами) имеет характер *связей*, т.е. ограничений, налагаемых на взаимное расположение тел. На практике связи осуществляются путём скрепления тел различными стержнями, нитями, шарнирами и т.п. Если при этом можно пренебречь трением и

массами «скрепляющих элементов» системы, то роль связей сводится, лишь, к уменьшению числа степеней свободы системы.

Пусть система состоит из *N* частиц; тогда в каждый момент её положение описывается *3N* декартовыми координатами. Предположим, что на эту систему наложено ещё *k* связей; в итоге число *независимых* координат, задающих в каждый момент *t* положение системы, уменьшится и станет равным *S=3N-k*. Это и есть *число степеней свободы* системы. В качестве независимых координат, описывающих положение системы со связями, можно выбрать любую совокупность S величин, связанных с декартовыми координатами соотношениями вида (4.2.1) или (4.2.2).

**Определение:** Любая совокупность *S* величин *q1*, *q2*, *…, qS*, связанных с декартовыми координатами частиц системы соотношениями типа (4.2.1) или (4.2.2) и однозначно определяющих положение механической системы в каждый момент времени, называется *обобщёнными координатами* системы.

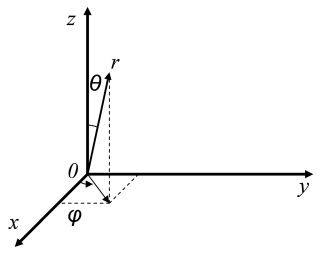
Таким образом, главное отличие обобщённых координат от всех прочих, в том числе декартовых, состоит в том, что эти координаты по определению независимы друг от друга.

Понятие обобщённых координат играет в физике чрезвычайно важную роль. Обобщённые координаты не обязательно должны быть геометрическими координатами – ими могут быть вообще произвольные физические величины, имеющие размерность длины, площади, объёма, угла (т.е. безразмерные) и т.д. Выбор обобщённых координат полностью определяется соображениями удобства решения данной задачи и особенностями механической системы.

***Пример 1 –*** Сферические координаты

*r*, ** , **

(рисунок 4.3)

*x*  *r* sin** cos**

 *y*  *r* sin** sin ** ,



*z*  *r* cos**



здесь

*q*1  *r*, *q*2

 ** , *q*3

 ** .

Рисунок 4.3 – Связь сферической и декартовой координатной системы

*x*  *x*cos*t*  *y*sin *t*

 *y*  *x*sin *t*  *y*cos*t* ,



*z*  *z*



здесь *q1=x', q2=y', q3=z'*.

***Пример 2 –*** Система координат *x', y', z',*

вращающаяся с постоянной угловой скоростью ** вокруг оси *Z* системы *x, y, z*

**Определение:** Производная от обобщённой координаты *q* по времени называется *обобщённой скоростью* и обозначается *q* .

Дифференцируя формулы преобразования (4.2.1), находим

*x* 

*x*

*q*1

*q*1

 *x*

*q*2

*q*2

 *x*

*q*3

*q*3

* *x*

*t*

(4.2.3)

и аналогично для *у* и *z* .

Из уравнений (4.2.2) имеем:

*q*1

 *q*1

*x*

*x*  *q*1

*y*

*y*  *q*1

*z*

*z*  *q*1

*t*

(4.2.4)

и аналогично для

*q*2

и *q*3 .

Из соотношений (4.2.3) и (4.2.4) видно, что скорости в декартовых координатах линейно выражаются через обобщённые скорости, и наоборот. При этом коэффициенты могут быть функциями координат. В

частном случае, когда формулы преобразования не зависят от времени (что соответствует переходу к неподвижным координатам), формулы (4.2.3) и (4.2.4) упрощаются

*x* 

*x*

*q*1

*q*1

 *x*

*q*2

*q*2

* *x*

*q*3

*q*3

и т.д. (4.2.3')

*q*1

 *q*1

*x*

*x*  *q*1

*y*

*y*  *q*1 *z*

*z*

и т.д. (4.2.4')

В этом случае скорости связаны друг с другом линейными однородными соотношениями. Ниже мы будем говорить только о таких, т.е. неподвижных, координатах.

Преобразуем лагранжиан к обобщённым координатам *q*. Для этого запишем его в декартовых координатах

*L*  *T*  *U*

 *m* *x* 2  *y* 2  *z* 2 *U* (*x*, *y*, *z*) 2

и подставим сюда выражения для скоростей (4.2.3'); получим соотношение вида

, (4.2.5)

 ~*q* , *q* , *q* 

*L*  

*a q*  *a q* 2  *a q* 2  2*a q* *q*  2*a q* *q*  2*a q* *q* 

2

11 1

22 2

33 3

12 1 2

13 1 3

23 2 3

*U*

1 2 3

где коэффициенты *a11, a12* и т.д. – некоторые функции от *q1, q2, q3*,

#### ~

*U* *q*1 , *q*2 , *q*3   *U* *x*(*q*1 , *q*2 , *q*3 ), *y*(*q*1 , *q*2 , *q*3 ), *z*(*q*1 , *q*2 , *q*3 ) *.*

Таким образом, лагранжиан *L* представляет собой квадратичную форму относительно обобщённых скоростей *q* .

**Определение:** *Обобщённым импульсом pi*, сопряженным с обобщённой координатой *qi*, называется производная

. (4.2.6)

*i*

*q*

*i*

*p*  *L*

На основании этого определения находим из (4.2.5)

 *p*1  2(*a*11*q*1  *a*12 *q*2  *a*13 *q*3 )

######   2(*a*

*p*

 2

21*q*1

 *a*22

*q*2

 *a*23

*q*3 )

. (4.2.7)

 *p*  2(*a q*  *a*

*q*  *a*

*q* )

 1 31 1

32 2

33 3

(подразумевается, что *aij=aji*).

Система уравнений (4.2.7) может быть решена относительно обобщённых скоростей *q* , причём ненулевые решения получатся, если определитель системы отличен от 0

*a*11 *a*21 *a*31

*a*12 *a*22 *a*32

*a*13 *a*23 *a*33

######  0 ,

а это условие выполняется всегда, поскольку квадратичная форма

*m* (*x* 2  *y* 2  *z* 2 )

###### 2

принимает лишь положительные значения и формулы перехода от *x, y, z* к

*q1, q2, q3* однозначны.

Посмотрим, какой смысл имеет обобщённый импульс в случае декартовых координат. Запишем лагранжиан

Отсюда

*L*  *m* (*x* 2  *y* 2  *z*2 )  *U* (*x*, *y*, *z*) .

###### 2

*px* 

*L*

*x*

 *m x* ,

т.е. импульс, сопряжённый декартовой координате *x*, есть масса, умноженная на *x*-компоненту скорости.

Найдём теперь выражение для обобщённого импульса в случае полярных координат *r*, ** . Воспользуемся ранее полученными соотношениями

*x*  *r* cos**  *r* sin **  **

 *y*  *r* sin **  *r* cos **  ** .



Возведём в квадрат и сложим

*L*  *m* (*x*2  *y* 2 ) *U* (*x*, *y*)  *m* (*r*2 cos2 **  2*rr*** sin ** cos** 

#### 2 2

отсюда

 *r* 2 sin 2 **  *r*2 sin2 **  2*rr*** sin** cos**  *r* 2 cos2 **) *U* (*r*,**) 

 *m* (*r*2  *r* 2 ) *U* (*r*,**).

#### 2

*p r* 

*L*

*r*

 *m r*,

*p* 

*L*

**

 *mr*

2** .

Таким образом, радиальный импульс есть масса, умноженная на

радиальную скорость *r* , а азимутальный (угловой) импульс *p* есть, как

нетрудно видеть, момент импульса относительно начала координат

В самом деле,

*p*  *m*(*xy*  *x**y*)  *mr* 2** .

####   

##### i j k

 

*m*[*r* ]  *m x y* 0 .

*x* *y* 0

*m*[*r* ]*z*

 *m* ( *xy*  *x**y*)  *m*{*r* cos ** (*r* sin **

 *r* cos **  ** ) 

* (*r* cos **

 *r* sin **  ** )*r* sin **}  *mr* 2** 

*p* .

* 1. Функция Гамильтона. Канонические уравнения Гамильтона

Мы видели, что свойства и поведение механической системы можно полностью задать с помощью лагранжиана *L*, являющегося функцией обобщённых координат, обобщённых скоростей и времени.

Как показал Гамильтон, иногда удобнее описывать механическую систему, задав некоторую функцию обобщённых координат, обобщённых импульсов и времени. Тогда уравнения механики приобретают особенно простую и симметричную форму и носят название *канонических уравнений Гамильтона.*

**Определение:** Функцией Гамильтона, или гамильтонианом *H(p,q,t)*

называется функция

. (4.3.1)

*H* ( *p*, *q*, *t*)   *pi q**i*  *L*(*q*, *q*,*t*)

*i*

При этом, чтобы получить левую часть, надо в правой части, пользуясь определением обобщённого импульса, выразить *q* через *p*.

Найдём физический смысл гамильтониана. Для этого рассмотрим первое слагаемое в (4.3.1)





 *pi q**i*

*i*

 *L q*

*i* *q**i*

*i*

 *T q*

*q**i*

*i*

. (4.3.2)

Но кинетическая энергия в обобщённых координатах, как мы видели, есть

квадратичная форма по переменным

*q**i*

*T*   *aij q**i q* *j* ,

*i j*

т.е. однородная функция второй степени относительно обобщённых скоростей. Для однородной функции *n*-й степени справедлива теорема Эйлера

. (4.3.3)

*z*

*y*

*x*

*то* *f*  *x*  *f*  *y*  *f*  *z*  *nf* (*x*, *y*, *z*)

*если f* (*ax*, *ay*, *az*)  *an f* (*x*, *y*, *z*), *где a*  0, *n*  *N* ,

Для доказательства теоремы Эйлера продифференцируем выражение

*f* (*ax*, *ay*, *az*)  *an f* (*x*, *y*, *z*)

по параметру *a* получим

*f*  (*ax*)  *f*  (*ay*)  *f*  (*az*)  *nan*1 *f* (*x*, *y*, *z*) ,

или

(*ax*) *a*

(*ay*) *a*

(*az*) *a*

*f*  *x*  *f*  *y*  *f*  *z*  *nan*1 *f* (*x*, *y*, *z*) .

(*ax*) (*ay*) (*az*)

Полагая теперь *a*=1, приходим к соотношению

*f*  *x*  *f*

*x* *y*

* *y*  *f*

*z*

* *z*  *nf* (*x*, *y*, *z*) ,

что и требовалось доказать. Применяя к правой части (4.3.2) теорему

(4.3.3), получаем:  *pi q**i*

*i*

 2*T* , откуда

или

*H* ( *p*, *q*, *t*)  2*T*  *L*  2*T*  *T*  *U* 

*H* ( *p*, *q*, *t*)  *T*  *U* . (4.3.5)

Таким образом, в неподвижных координатах гамильтониан

представляет собой полную энергию механической системы.

***Пример 1 –*** Составим функцию Гамильтона для линейного гармонического осциллятора.

Вначале запишем лагранжиан:

*L*  *m q* 2

2

* *k q* 2 ,

###### 2

где *k* – постоянная упругости.

Импульс *p*  *L*

Гамильтониан

*q*  *mq* , следовательно, скорость *q* 

*p m* .

*H* ( *p*, *q*) 

2

*pq*   *m*

*q* 2  *k*

*q* 2   *p*

*p m* 

###### 



2

 *q* 2 



*p*  *k*

*p*  *k*

*q* 2 .

######  2 2 





*m* 2  *m*  2

2*m* 2

***Пример 2 –*** Построим функцию Гамильтона для частицы *m*,

движущейся в центральном поле с потенциальной энергией

*U* (*r*)  * r* ;

** – некоторая постоянная. (Если ** >0, то имеем, как мы видели выше, кулоново поле притяжения; ** <0 – кулоново поле отталкивания).

Лагранжиан

*L*  *m* (*r*2

#### 2

 *r* 2** 2 )  ** .

##### r

Радиальный и угловой импульсы

*p r* 

*L*

*r*

 *m r*, *p*

  *L*

**

 *mr*

2** ,

соответствующие обобщённые скорости

*r* 

*p r* ,

##### m

** 

*p mr* 2 .

Подставим эти выражения в формулу для гамильтониана (4.3.1)

*H* ( *p*, *q*) 

*pr r* 

*p* 

*m* *r*  *r* 2** 2  **

2 *r*

*p* 2

######  *r*

m

2

 ** 

*p*

*mr* 2

*m r* 2  ** 

2 *m* 2*r* 4

*p*

4

** 1 

*p* 2  **

######    *p* 2  **   .



*r*

*r*



*r* 2*m*  *r* 2 

Сформулируем теперь вариационный принцип механики с помощью функции Гамильтона и в соответствии с этим преобразуем сами уравнения Лагранжа.

Запишем лагранжиан *L = T – U*, поскольку *H = T + U*, то

*L = T – (H – T) =*2*T – H.*

Вариация действия

*t*2

**  *Ldt*  0

*t*1

для истинной траектории. Имеем

*t*2 *t*2  

** 2*T*  *H*  *dt* **  *pi q**i*  *H*  *dt* 0 ,

*t*1 *t*1  *i* 

*t*2  *H* *H* 

 *piq**i*  *q**ipi*  *p pi*  *q qi* *dt* 0 .

*t*1 *i*  *i i* 

1-й член интегрируем по частям

*t*2 *t* 2 *t*2

*p q* *dt*  *p q t*2  *p* *q dt*  

*p* *q dt* ,

 *i i*

*t*1

*i i t*1

 *i i*

*t*1

 *i i*

*t*1

тогда вариационный принцип примет вид

*t*2 *t*2 

*H* 

 *H*  

** 2*T*  *H* *dt*  *q**i*  *p*

*pi*   *p* *i*  *q*

*qi* *dt* 0 .

*t*1

Так как *U* не зависит от *pi*, то

*t*1 *i* 

*i*  

*i*  

*H*

*pi*

 *T*

*pi*

 *q**i* ,

и все коэффициенты при

* pi*

обращаются в 0. Если все

* qi* –

произвольны, то все коэффициенты при них также должны обращаться в 0. В итоге мы получаем условия истинности траектории в виде двух уравнений

,

*i*

*q*

*i*

*i*

*p*   *H*

*p*

*i*

*q*  *H* ,

называемых каноническими уравнениями Гамильтона.

Канонические уравнения, в отличие от уравнений Лагранжа, – 1-го порядка (а не 2-го). Зато их число равно 2*S*, т.е. вдвое больше.

* 1. Интегралы движения. Скобки Пуассона

Канонические уравнения особенно удобны для формирования законов сохранения и для отыскания интегралов движения, т.е. величин, не меняющихся со временем в процессе движения механической системы.

Предположим, прежде всего, что функция Лагранжа или функция Гамильтона механической системы не зависят явно от какой-то

обобщённой координаты *qб*

(такую обобщённую координату называют

*циклической*). Тогда на основании канонического уравнения

*pi*   *H*

*qi* , полагая в нём

*i*  ** , заключаем, что соответствующий

обобщённый импульс сохраняется

*p*  *const* .

Найдём теперь необходимые и достаточные условия того, что какая-либо величина *F=F(q,p,t)* является интегралом движения. Для этого запишем полную производную от *F* по времени

*dF*  *F*

##### dt t

 *F*

* *q*



*q**i*

* *F*

*p*



*pi*  . (4.4.1)



*i*  *i i* 

В силу канонических уравнений Гамильтона правая часть (4.4.1) примет вид

dF F

 *F* *H* *F* *H* 

*dt*  *t*

  *q* *p*  *p*

*q*  , (4.4.2)

*i*  *i i i i* 

где *H* – гамильтониан системы. Введём обозначение





 *pi* *qi* *qi* *pi* 

*H* *F* *H* *F* 



 



*i*

*H* , *F*

, (4.4.3)

оно называется *скобкой Пуассона* для величин *H* и *F*. Из (4.4.2) и (4.4.3) видно, что для того чтобы величина *F* была интегралом движения

*dF dt*  0 , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

*t*

*F*  *H* , *F* 0

. (4.4.4)

Если же величина *F* не зависит явно от времени, то условием того, чтобы она была интегралом движения, служит обращение в 0 её скобки Пуассона с гамильтонианом

. (4.4.4’)

*H* , *F* 0

Из определения скобок Пуассона легко получить следующую запись канонических уравнений

(4.4.5)

*q**i*  *H* , *qi* 

 *p*  *H* , *p* .



*i*

*i*

Кроме того, легко проверить справедливость следующих соотношений

(4.4.6)

*F*  *p* , *F*

*q*

*i*



*i*

 *F*  *q* , *F* .



*p*

*i i*

*i*

В частности, если *F=qi*, то из (4.4.6) следует

*pi* , *qi*   1, *pi* , *pi*   *qi* , *qi*   0 .

Кроме того, при

*j*  *i*

имеем *p* , *q*  0 .

Таким образом, получаем *основные*, или *фундаментальные*, скобки

*i j*

Пуассона

*p* , *p*

*i*

*i*

*j*

*j*

*ij*

 *q* , *q*

 0,

*i*, *j*

*p* , *q*

*i*

*j*

 ** 

1, *i* *j* .

0, *i* *j*

Справедлива *теорема Пуассона*: если две какие-либо величины *А* и *В*

являются интегралами движения, то и их скобка Пуассона *A*, *B*

является сохраняющейся величиной.

также

Таким образом, с помощью скобок Пуассона по известным интегралам движения можно находить новые.

Скобки Пуассона играют важную роль в математическом аппарате квантовой механики.

* 1. Уравнение Гамильтона-Якоби

Рассмотрим метод решения уравнений механики, предложенный Гамильтоном.

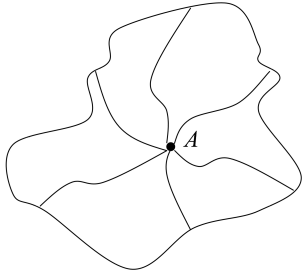


Рисунок 4.4 – Совокупности траекторий частиц, исходящих из точки

Пусть имеется пучок частиц, исходящих из одного центра (рисунок 4.4) и не взаимодействующих друг с другом. Примером может служить поток * -*частиц, испускаемых радиоактивным ядром; опыт показывает, что скорости ** -электронов в этом случае достаточно велики, так что можно пренебречь энергией

кулоновского взаимодействия между частицами.

Пусть точка *А* является центром пучка, а исходящие из неё линии представляют собой траектории частиц. Запишем интеграл действия

*t*

*S* (*x*, *y*, *z*, *xA* , *y A* , *z A* ,*t*)   *Ldt* . (4.5.1)

0

Интеграл берётся вдоль каждой из траекторий от точки *А* (момент времени

*t=*0) до некоторой точки *(x,y,z)*, отвечающей моменту времени *t*.

**Определение:** Геометрическое место точек, для которых функция действия (4.5.1) имеет заданное значение

*S(x,y,z,t)=C*,

называется *поверхностью равного действия*.

Поскольку *S* зависит от времени, то очевидно, что поверхность равного действия перемещается в пространстве, меняя свою форму, и что это перемещение связано с движением частиц пучка. Гамильтон показал, что функция действия удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению в частных производных и что знание этой функции даёт полное решение механической задачи.

Запишем полную вариацию функции действия

*S t*

*S t*  *L* *L* 

*S*  *t t*  **  *Ldt* 

*t t*   *q q*  *q* *q* *dt* 

0 0  

*S t*  *L d*  *L*   *t d*  *L*  .

 *t t*   *q q*  *dt*  *q* *q* *dt*   *dt*  *q* *q* *dt*

0     0  

Так как интеграл действия берётся вдоль действительной траектории, то первый из интегралов тождественно равен 0. Учитывая

соотношение

*p*  *L*

*q* , получим

*S*  *S t* 

*t*

*pxx*  *p*

*yy* 

*pzz* . (4.5.2)

Отсюда видно, что

*p*  *S* , *p*

*x* *x y*

 *S* , *p*

*y z*

 *S*

*z*

,

или в векторной форме

*p*  *S*



. (4.5.3)

Мы получили важное свойство: траектории частиц пучка пересекают поверхность равного действия под прямым углом. Если известна

поверхность равного действия, то *S*

даёт в каждой её точке величину и

направление импульса той частицы, которая в данный момент времени пролетает через эту точку поверхности.

Получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция действия. Запишем полную производную от *S* по времени, по определению действия

Отсюда

*dS*  *S dt* *t*

 *S*

*x*

*x*  *S*

*y*

*y*  *S*

*z*

*z*  *S*

*t*

 *px*

*x*  *py*

*y*  *pz*

*z*  *L* .

*S*  *p*

*t x*

*x*  *py*

*y*  *pz*

*z*  *L*  *S*

*t*

* *H* (*x*, *y*, *z*, *px*

, *py*

, *pz*

)  0 ,

или с учётом (4.5.3)

*S* 

*S* *S*

*S* 

*t*  *H*  *x*, *y*, *z*, *x* , *y* , *z*   0

. (4.5.4)

####  

А поскольку гамильтониан есть сумма кинетической и потенциальной энергий системы, то

. (4.5.5)





         *U* (*x*, *y*, *z*)  0





*t* 2*m*  *x*   *y*   *z*  

*S* 1  *S* 2  *S* 2  *S* 2 

– уравнение Гамильтона-Якоби. Для консервативной системы, энергия которой сохраняется

 *S* *S* *S* 

*H*  *x*, *y*, *z*, *x* , *y* , *z*   *E* ,

####  

и из (4.5.4) получаем

*t*

*S*  *E*

. (4.5.6)

Проинтегрируем (4.5.6) по времени от 0 до *t*

S(x,y,z,t) 

* *E*  *t* 

*S0(x,y,z)*, (4.5.7)

где *S0*–«постоянная интегрирования» (по отношению к переменной *t*). Из (4.5.7) следует

*S*  *S*0 , *S*

*x* *x* *y*

 *S*0 , *S*

*y* *z*

 *S*0 ,

*z*

и уравнение Гамильтона-Якоби принимает вид

 *S*0

*S*0

*S*0 

*H*  *x*, *y*, *z*,

 *x*

, *y*

, *z*

  *E* ,

#### 

а с учётом выражения для гамильтониана

 *S* 2

 *S* 2

 *S* 2

0 

 0 

 0 

 2*m**E*  *U* (*x*, *y*, *z*). (4.5.8)

 *x* 

 *y* 

 *z* 

Функция *S0* называется *укороченным действием*. Из (4.5.7) следует

*S*0*(x,y,z)*  *S(x,y,z,t)*  *E*  *t* Найдём вариацию функции *S0*; при этом времени

.

* t*  0 , так как *S0* не зависит от

отсюда

*S*0*(x,y,z)*  *S(x,y,z,t)*  *E*  *t* ,

. (4.5.9)

*E*

*t*  *S*0

***Пример –*** Покажем на примере линейного гармонического осциллятора, как применяется метод Гамильтона.

Запишем функцию Гамильтона для осциллятора

*p* 2 *k* 2

*H*   *x*

2*m* 2

 *E* .

С помощью этой функции получим уравнение Гамильтона-Якоби для осциллятора

1  *S*0   *k x* 2  *E*

####   .

2*m*  *x*  2

Проинтегрируем это уравнение, чтобы найти закон движения осциллятора.

Выразим производную

*S*0 *x*

откуда

*S*0 (*x*) 

*S*0

*x*

*x*

2*m* 

0



*E*  *k*

2*m*

#### 2

 ,

*x*2 *dx* .

*E*  *k x*2

2

Заметим, что интеграл в последнем выражении можно не вычислять,

поскольку нас интересует не (см.(4.5.9)):

*S*0 (*x*) , а её производная по полной энергии

*t*  *S*0

.

*E*

Поэтому можно выполнить дифференцирование под знаком интеграла:

*m*

*k*

*k*

2*E*

*t*  *S*0  *dx*  

2*m*

*E*  *k x*2

2

*m*

2

*k*

2

2

*x*



*x*



*E* 0 0

 arcsin *x* .

Отсюда получаем известный результат

*k dx*

2

*E*  *k x* 2

2

*x*  sin

2*E*

##### k

*t*  sin **

##### k

*k*

2*m*

2*E*

*t* , ** 2

 *k* .

##### m

* 1. Оптико-механическая аналогия

Выше было показано (см. формулу (4.5.7)), что между функциями *S*

и *S0* имеет место соотношение (для консервативных систем)

*S* (*r* , *t*)  *Et*  *S*0 (*r* ) . (4.6.1)

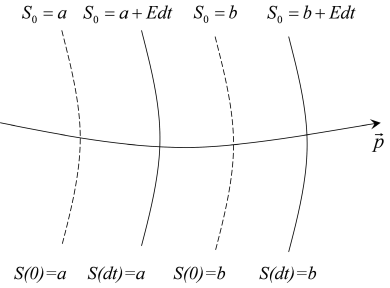


Рисунок 4.5 – Примерное соотношение между функциями S и S0

Так как укороченное действие

*S*0 не зависит от *t*, то поверхности

*S*0  *const*

занимают фиксированные положения в пространстве. В то же

время поверхности равного действия

*S*  *const* движутся, и в каждый

момент *t* такая поверхность совпадает с некоторой поверхностью

*S*0  *const* . Однако значение *S*0 , отвечающее заданному значению *S*, будет

изменяться со временем в соответствии с равенством (4.6.1). Рассмотрим, например, поверхности *S=a* и *S=b* (рисунок 4.5). В момент *t=0* они будут

совпадать с поверхностями

*S*0  *a*

и *S*0  *b* соответственно.

Однако спустя некоторое время *dt* поверхность

*S*  *a*

будет

совпадать с поверхностью

*S*0  *a*  *Edt* , а поверхность

*S*  *b* с

поверхностью

*S*0  *b*  *Edt* . Таким образом, движение поверхности

*S*  *a*

подобно распространению в пространстве фронта некоторой волны.

В общем случае каждая поверхность

*S*  *const*

изменяет свою

форму при возрастании *t*. Следовательно, скорость волны, т.е. скорость, с которой движется такая поверхность, будет в разных её точках различной.

Вычислим эту скорость в простейшем случае, когда рассматривается движение одной частицы. Скорость волны в некоторой точке поверхности

*S*  *const*

равна

*u* 

##### dl

*dt* , (4.6.2)

где *dl* – расстояние, которое волна проходит за время *dt* в направлении, перпендикулярном к *S*.

Но за время *dt* фронт волны переходит от поверхности

*S*0 к поверхности

*S*0  *dS*0 , где

*dS*0  *Edt* . Кроме того,

*dS*0 *dl*



 *S*0 ,

(4.6.3)

Тогда

*dt*  *dS*0 .

##### E

*u*  *dl* 

##### dt

*dS*0

#### ~~~~

*S*0

: *dS*0

##### E

 ~~~~ .

*S*0

*E*



(4.6.4)

Поэтому с учётом формулы (4.5.3)

*S*0  *p*

скорость волны

*u*  *E*

##### p

 *E* .

*m*

(4.6.5)

Равенство (4.6.5) показывает, что скорость поверхности

*S*  *const*

обратно

пропорциональна скорости частицы, движение которой описывается с



помощью *S*. Кроме того, вектор

*S*0  *p*

перпендикулярен к поверхности

*S*0  *const* , т.е. к поверхности

*S*  *const* . Таким образом, семейство

поверхностей

*S*0  *const*

определяет систему траекторий возможного

движения частицы: указанные траектории нормальны к поверхностям этого семейства. Когда частица движется вдоль одной из возможных траекторий, поверхности *S* тоже движутся, но эти движения – не

«синхронны», так как при увеличении скорости ** скорость *u* уменьшается, и наоборот.

Поверхности

*S*  *const*

мы рассматривали как последовательные

положения фронта волны и, исходя из этого представления, говорили о скорости её распространения. Однако до сих пор нам неясна природа этих волн, и поэтому мы ничего не можем сказать об их частоте или длине волны. Чтобы разобраться в этом, рассмотрим хорошо известный волновой процесс – движение световой волны. Распространение такой волны описывается волновым уравнением

2 *f*

* *n*2

*c*2

 2 *f*

*t* 2

####  0,

(4.6.6)

где *f* обозначает скалярную характеристику электромагнитной волны (например, скалярный потенциал ** ), *с* – скорость света в вакууме, *n* –

показатель преломления среды (отношение скорости с к скорости света в

среде). В общем случае *n=n(x,y,z)*. Если *n=const*, то решением (4.6.6) является функция

*f* ( *r* , *t* ) 





*f*  *ei* ( *kr* *t* )

0

(4.6.7)

*–* плоская монохроматическая волна.

При этом волновое число *k* и частота ** связаны соотношением

*k*  2** 

**

*n*

*c* . (4.6.8)

Пусть вектор *k* направлен вдоль оси *z*, тогда

*f* ( *z* , *t* ) 

*f*  *eik*0 ( *nz*  *ct* ) , (4.6.9)

где *k*0  * с*

0

– волновое число в вакууме.

Пусть теперь *n* есть функция координат. Тогда плоская волна (4.6.9) уже не будет решением уравнения (4.6.6), так как коэффициент преломления неодинаков в разных точках и это приведёт к искажению

формы волны. Мы, однако, будем считать, что *n* слабо изменяется от точки

к точке, и решение уравнения (4.6.6) будем искать в виде

####   

*f* (*r* , *t* ) 

*A*(*r* )  *e* *ik*0 ( *L* ( *r* )  *ct* )  , (4.6.10)

похожем на (4.6.9). Величины *A* и *L* здесь являются действительными функциями *r* , подлежащими определению. Первая из них характеризует амплитуду волны. Если бы было *n=const*, то *L* равнялось бы *nz* и называлось оптической длиной пути светового луча. Часто её называют ещё эйконалом.

Подставим предполагаемое решение (4.6.10) в волновое уравнение (4.6.6). Вычислим производные:

 *n* (*r* )  2 *f* 



2

2 2 

,

*c* 2 *t* 2

*k*0 *n* (*r* ) *f*

 

 *f*   *Ae ik* 0 ( *L* ( *r* )  *ct* ) 





*Ae ik* 0 ( *L* ( *r* )  *ct* )  *ik*

0  *L* ,

####  2 *f*

   *f*

   2 *Ae ik* 0 ( *L* ( *r* )  *ct* )

*  *Ae ik* 0 ( *L* ( *r* )  *ct* )  *ik*

0  *L* 

#### 



* +  *Ae*

*ik* 0 ( *L* ( *r* )  *ct* )

##### ik



0  *L* 

*Ae ik* 0 ( *L* ( *r* )  *ct* )

2  *ik*



0  *L* 

2

* *Ae ik* 0 ( *L* ( *r* )  *ct* )  *ik*



 2 *L* 

  2 *A*

 *k* 2 (  *L* ) 2   *f* 

0  0 





*A*

####  

 



 2 *A L*

##### ik



0  2 *L* 

#### 

   *f* .

*A* 

После подстановки в (4.6.6) и приравнивания нулю действительной и мнимой частей получим систему уравнений для определения амплитуды *A*

и эйконала *L* электромагнитной волны (4.6.10)

 2 *A* 



2  2 

  2   0

( *L*) *A*

*k*0 *n*

#### 

2

(*r* ) 

#### 

. (4.6.11)

*A*

*L*  2*A**L*  0

Так как мы ещё не делали никаких приближений, то уравнения (4.6.11) являются точными. Предположим теперь, что коэффициент

преломления

*n*(*r* )

столь медленно меняется от точки к точке, что на

расстояниях порядка длины волны **0

этим изменением можно

пренебречь. Другими словами, это означает, что длина волны мала по сравнению с расстоянием, на котором проявляется неоднородность среды.

Такое приближение называется приближением геометрической

оптики. Формально оно сводится к тому, что

**0 →0. Учтём его в первом из

соотношений (4.6.11). Для этого запишем данное соотношение в виде

 **0  2 *A*   

2

2

 2 

####   *n*

2**

(*r* )  (*L*) *A*  0 ,

####  

при

**0 →0 оно переходит в уравнение эйконала

. (4.6.12)

(*L*)  *n* (*r* )

2

2



Определяемые этим уравнением поверхности *L=const* являются поверхностями постоянной фазы и, следовательно, определяют фронт волны. Все световые лучи будут перпендикулярны к этим поверхностям и, значит, тоже будут определяться уравнением (4.6.12).

Мы видим, что уравнение (4.6.12) подобно уравнению (4.5.8), т.е.

уравнению Гамильтона-Якоби для укороченного действия

*S*0 . Таким

образом, мы имеем аналогию:

*S*0 ~ *L* ;

~ *n* .

Поэтому *классическую механику можно рассматривать как аналог геометрической оптики*, в котором роль поверхностей движущейся волны и перпендикулярных к ним световых лучей играют поверхности *S*  *const* и перпендикулярные к ним траектории движения. Отсюда ясно, почему волновая теория Гюйгенса и корпускулярная теория Ньютона одинаково хорошо объясняли явления отражения и преломления: в рамках геометрической оптики между этими теориями имеется формальная аналогия.

2*m*(*E* *U* )

(напомним, что у *K* и *K*  общее начало, так что радиусы-векторы *r* и *r*  частицы в системах *K* и *K*  совпадают). Подставим это выражение в (5.6.4)

. (5.6.6)

2



  2

*m*

  

 *m* * r*  * r*   *mar*  *U*

*m* 2

2

*L* 

Это – общий вид функции Лагранжа частицы в произвольный НИСО. Заметим, что вращение системы отсчёта приводит к появлению в функции Лагранжа члена особого вида – линейного по скорости частицы.

Для вычисления производных, входящих в уравнение Лагранжа (5.6.2), запишем полный дифференциал от (5.6.6)

*dL*  *m*

**  *md***

 *m***

 *m***

**



####    *U*  

##### d

(*дифференцируем*

*r*

*по * *и*

*dr*

, *но*

*r*

##### r dr

*не по t*)

*madr*

 *dr r*

.



 *m* 

####   

  

   

  *U* 

*d*  *md* * r*  *mdr* * *  *mdr*[[* r* ]**]  *madr*  ~~~~ *dr*



##### r

(в 3-м и 4-м членах циклически переставлены сомножители в смешанном

произведении). Собирая члены, содержащие *d*

и *dr* , находим

*L*

**

*L*

#### 



##### r

 *m *  *m* **

 *m* ****  *m*

*r* 

******



,

*r* ** 

 

*ma*  *U* .

##### r





~~~~

Подставим это выражение в (5.6.2) и получим искомое уравнение движения

*r*

*r*

*d*  *L*

*dt*  **

*r*

 *m d*

##### dt

 *m* **  

*m* **   *m d*

##### dt

*r*

 *m* **  

*m* ** **  ,

*m d*

dt

 *m* **  

*m* ** ** 

*m* ****  *m*

******  **  *m*    *U* ,

r

*r*



*a*



. (5.6.7)

*r*  2*m*** *m****r*****

*ma*

*r*

~~~~

*dt*

Мы видим, что «силы инерции», обусловленные вращением системы

 

отсчёта, складываются из трёх частей. Сила

*m* [ *r * ]

связана с

неравномерностью вращения, а две другие присутствуют и при

равномерном вращении. Сила

2 *m* * * 

называется *силой Кориолиса*; в

отличие от всех до сих пор рассматривавшихся (не диссипативных) сил

она зависит от скорости частицы. Сила

*m* ** ** ****

называется

*центробежной*. Она лежит в плоскости, проходящей через *r* и ** , и

*r*

направлена перпендикулярно к оси вращения (т.е.  **

) в сторону от оси;

по величине центробежная сила равна частицы от оси вращения.

*m *

2 , где ** – расстояние

Рассмотрим частный случай равномерно вращающейся системы

координат, не имеющей поступательного ускорения. Для этого положим в

(5.6.6) и (5.6.7) **

 *const* ,

*a*  0

. Получим

, (5.6.8)

2

2

*m*  

  

 *m* * r*  * r*   *U*

*m* 2

2

*L* 

и уравнение движения

*r*

*r*



*dt*

*m d*   *U*  2*m***** *m***** ****

. (5.6.9)

Вычислим энергию частицы в этом случае, для этого воспользуемся

выражением для гамильтониана *H*

*r*

 *E* 

*p*  *L*

и импульса частицы

*p* 



откуда получим

 *L*

 **

 *m * 

*m* ** 

, (5.6.10)

Заметим, что

. (5.6.11)

в энергии отсутствует член, линейный по скорости ** .

2

2

 * r*   *U*

2

*m* 2 *m*  

*E* 

Влияние вращения системы отсчёта сводится к добавлению в энергии

умножим все на

sin2 ** и получим

.

cos**

2*xy*

*AB*

*x*2 *y*2

*A*2 *B*2

2

sin **   

Это – уравнение эллипса с центром в начале координат (оси симметрии эллипса в общем случае не совпадают с осями *x* и *y*).

## Литература, рекомендуемая для изучения дисциплины

* 1. Ольховский, И.И. Курс теоретической механики для физиков / И.И. Ольховский. – М.: Наука, 1970. – 448 с.
  2. Голдстейн, Г. Классическая механика / Г. Голдстейн. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
  3. Ландау, Л. Д. Механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Наука, 1973. – 204 с.
  4. Компанеец, А.С. Курс теоретической физики : в 2 т. / А.С. Компанеец. – М.: Просвещение, 1972. – Т.1. – 512 с.
  5. Савельев, И.В. Основы теоретической физики : в 2 т. / И.В. Савельев. – М.: Наука, 1975. – Т.1. – 416 с.