

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет"

Кафедра автомобильного транспорта

А.А. АРХИРЕЙСКИЙ, Е.Н. РАССОХА

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ О НАДЕЖНОСТИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским
советом государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования "Оренбургский
государственный университет"

Оренбург 2004

ББК 34.41 я73

А 79

УДК 629.113:519.22(076.5)

Рецензент

кандидат технических наук, доцент М.А. Токарева

Архирейский А.А., Рассоха Е.Н.

А79 Статистическая обработка данных о надежности: Методические указания к выполнению расчетно-графической работы. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. – 35с.

В методических указаниях рассмотрены некоторые вопросы обработки данных об эксплуатационной надежности транспортных средств методами математической статистики. Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальности 150200 для изучения дисциплины "Основы теории надежности и диагностика" и специальности 230100 для изучения дисциплины "Основы работоспособности технических систем".

ББК 34.41 я73

© Архирейский А.А., 2004

© Рассоха Е.Н., 2004

© ГОУ ОГУ 2004

Введение

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой изучения дисциплины "Основы теории надежности и диагностика" студентами специальности 150200 и дисциплины "Основы работоспособности технических систем" студентами специальности 230100. Обе дисциплины относятся Государственным образовательным стандартом по направлению подготовки дипломированного специалиста 653300 – "Эксплуатация транспорта и транспортного оборудования" к специальным дисциплинам.

Одним из разделов дисциплины, определенным требованиями к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы, является "Методы сбора и обработки информации по надежности".

Теоретическое изучение дисциплин "Основы теории надежности и диагностика" и "Основы работоспособности технических систем" сопровождается выполнением расчетно-графической работы, преследующим следующие цели:

- закрепить и углубить теоретические знания, полученные при изучении основ теории надежности;
- привить навыки пользования технической и справочной литературой;
- научить определять основные показатели надежности и принимать управленческие решения по их совершенствованию на различных стадиях жизненного цикла автотранспортных средств;
- подготовить студентов к выполнению соответствующих разделов дипломного проекта, а в дальнейшем - к самостоятельным исследованиям.

Целью настоящего методического указания является ознакомление студентов специальностей 150200 и 230100 с обработкой данных о надежности автомобилей, полученных при их эксплуатации, методами параметрической статистики.

Объем и содержание расчетно-графической работы составляют:

1) расчетно-пояснительная записка, включающая:

- титульный лист;
- содержание;
- введение;
- задание на расчетно-графическую работу;
- оценки характеристик случайной величины;
- графическое представление случайной величины;
- подгонка теоретических распределений к эмпирическому;
- проверка соответствия теоретических распределений эмпирическому с помощью критериев согласия;
- заключение;

2) графическая часть, содержащая гистограмму, полигон частот и кривые четырех теоретических законов распределения.

Расчетно-пояснительная записка должна соответствовать требованиям СТП 101- 00 "Стандарт предприятия. Общие требования и правила оформления

выпускных квалификационных работ, курсовых проектов (работ), отчетов по РГР, по УИРС, по производственной практики и рефератов".

Во "Введении" обосновывается актуальность выполнения расчетно-графической работы, определяется цель и намечаются задачи в соответствии с поставленной целью.

В "Заключении" приводится краткая характеристика проделанной работы в соответствии с решаемыми задачами.

Графическая часть работы выполняется простым карандашом на листе миллиметровой (масштабно-координатной) бумаги формата А4 в выбранном масштабе.

Настоящая работа не претендует на полноту и законченность изложения всех вопросов, имеющих отношение к обработке информации о надежности машин. О замеченных недостатках в методических указаниях просьба сообщать на кафедру автомобильного транспорта ГОУ ОГУ. Авторы с благодарностью примут и рассмотрят любые предложения, касающиеся повышения научно-технического, учебно-методического, эргономического и содержательного уровня данных методических указаний.

1 Общие сведения

Для принятия объективных и квалифицированных решений, связанных с вопросами технической эксплуатации, инженеру часто необходимо выявлять закономерности неизбежного рассеивания величин и параметров, характеризующих техническое состояние автомобилей в фиксированный момент, к определенному пробегу или сам момент наступления исследуемого события. Особенностью этих закономерностей является то, что они получаются путем обобщения индивидуальных реализаций случайной величины и их описания при помощи одного из теоретических законов распределения. Вид и параметры закона распределения определяются действием совокупности случайных факторов.

Задачи выбора закона распределения, количественной оценки его параметров, расчет значений критериев согласия между теоретической и экспериментальной кривыми выбранного закона распределения относятся к задачам обработки статистических данных методами математической статистики.

Закон распределения характеризует вероятность возникновения тех или иных индивидуальных реализаций случайной величины. Знание законов распределения случайных величин позволяет использовать имеющийся математический аппарат, определять количественные показатели надежности машин, механизмов, устройств и решать практические задачи их технического обслуживания и ремонта. Изучение законов распределения случайных величин имеет не только описательное значение, но и большое самостоятельное значение, их знание позволяет:

- глубже познать существо изучаемого процесса, перейдя от его описания к количественным характеристикам;
- обобщить аналогичные процессы;
- более точно проводить расчеты по надежности, определять рациональную периодичность профилактики, межремонтные пробеги и т.д.;
- накапливать количественные характеристики и описание законов распределения и более обоснованно проводить расчеты при экспериментировании и, в частности - определять объем наблюдений;
- предвидеть достаточно точно проявление определенного закона до экспериментального изучения самого процесса.

Закон распределения является исчерпывающей характеристикой случайной величины, однако при малом числе наблюдений установить вид закона и оценить значения его параметров с достаточной точностью невозможно. Поэтому для описания случайной величины при малом числе наблюдений используются числовые характеристики.

Случайную величину можно достаточно полно охарактеризовать, определив ее наиболее вероятное значение и рассеяние относительно него.

Для описания наиболее вероятного значения случайной величины используют математическое ожидание, которое является положением центра группирования значений случайной величины. Математическое ожидание

вычисляют как среднее арифметическое значений случайной величины. В качестве характеристики рассеяния используют дисперсию - сумму квадратов отклонений значений случайной величины от ее математического ожидания.

Математическое ожидание и дисперсия, ввиду малого объема выборки и ее случайности, являются случайными величинами. Поэтому на практике выборочные числовые характеристики подвергают некоторому исправлению. Исправленные числовые характеристики называют оценками.

2 Оценки характеристик случайной величины

2.1 Точечные оценки

Среднее статистическое значение определяется по формуле:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2.1)$$

где n – число наблюдений (элементов выборки);

x_i – результат i -го наблюдения.

Статистическая дисперсия определяется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2. \quad (2.2)$$

Часто используется величина, равная квадратному корню из дисперсии, измеряемая в тех же единицах, что и случайная величина, и называемая средним квадратическим отклонением:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}. \quad (2.3)$$

Иногда для описания случайной величины полезно знать коэффициент вариации, который вычисляется как отношение среднего квадратического отклонения к среднему арифметическому:

$$v = \frac{S}{\bar{X}}. \quad (2.4)$$

Пример 1 *Время исправного состояния рулевого управления автобуса «Autosan» представляет собой случайную величину. В результате наблюдения были получены 15 значений времени исправного состояния рулевого управления в тыс. км пробега:*

13, 27, 19, 23, 58, 32, 39, 51, 38, 47, 33, 55, 57, 59 и 44.

Необходимо найти характеристики случайной величины.

Найдем оценку математического ожидания с помощью формулы (2.1):

$$\bar{x} = (13 + 27 + \dots + 44)/15 = 595/15 = 39,67.$$

Оценку дисперсии можно найти с помощью формулы (2.2), но на практике, для облегчения расчетов, используют следующее соотношение:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - N \bar{X}^2.$$

Таким образом, оценку дисперсии проще найти по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - N \bar{X}^2 \right)$$

$$S^2 = (1/(15-1))((13^2 + 27^2 + \dots + 44^2) - 15 \cdot 39,67^2) = (1/14)(2673 - 23601,67) = 223,52.$$

Среднее квадратическое отклонение определим как корень квадратный из дисперсии:

$$S = \sqrt{223,52} = 14,95.$$

Коэффициент вариации определим по формуле (2.4):

$$v = \frac{14,95}{39,67} = 0,38.$$

На практике, для удобства представления и обработки, данные, полученные в результате наблюдений, группируют по интервалам. Группированные данные представляют в виде границ интервалов и количества наблюдений, попавших в каждый интервал. В этом случае значением, представляющим каждый интервал с количеством попаданий m_j , служит середина интервала, которую вычисляют по формуле:

$$\bar{X}_j = X_{\min} + \Delta x(j + 0,5), \quad (2.5)$$

где X_{\min} – наименьшее значение из данных наблюдений;

Δx – величина интервала;

j – номер интервала ($j = 0, 1, 2, \dots k-1$);

k – количество интервалов группирования.

При выборе величины интервала группирования учитывают следующие принципиальные положения:

- величина Δx выбирается постоянной для всех интервалов;
- выбор величины Δx зависит от количества наблюдений и разброса их значений, рекомендуется задавать величину интервала такой, чтобы получилось не менее 6 и не более 20 интервалов;
- рекомендуется определять количество интервалов k при заданном количестве n по формуле Стенжерса:

$$k \leq 1 + 3,31 \lg n, \quad (2.6)$$

где n – объем выборки.

Очевидно, что когда данные расположены по интервалам, то некоторая часть информации теряется. Так, среднее значение и дисперсия, вычисленные по группированным данным, будут отличаться от значений, вычисленных по негруппированным данным. Данное отличие при расчете среднего значения и дисперсии, зависящее главным образом от величины интервала, очень незначительно и в большинстве случаев несущественно. Кроме того, группировка имеет свои преимущества, если необходимо обрабатывать большое количество данных. На практике группировку нужно применять когда велико и число наблюдений, и число различных значений среди них.

В случае группированных данных, формулы (2.1) и (2.2) приобретают вид:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \bar{x}_j m_j, \quad (2.7)$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \bar{X})^2 m_j, \quad (2.8)$$

где \bar{x}_j - середина j -го интервала;

m_j - число наблюдений в j -м интервале.

Пример 2 Разжимные кулаки ножных тормозов автомобилей ЗиЛ-431410 заменялись в эксплуатации при превышении допустимого износа рабочих поверхностей и мест сопряжений со втулками кронштейнов. В процессе наблюдений было зафиксировано 45 первых замен разжимных кулаков. Значения наработок на отказ в тыс. км:

251,7 201,4 192,9 70,0 198,9 133,5 125,0 260,6 173,2 223,1 234,0 255,3 227,3
144,3 238,5 167,6 250,8 217,1 102,1 199,2 246,6 163,6 192,2 205,2 329,9 283,8
177,7 209,6 233,0 165,6 165,1 218,3 231,8 145,6 265,0 197,6 246,0 139,9 190,3
226,5 236,1 223,8 241,8 160,0 118,7

Необходимо найти характеристики случайной величины.

Сгруппируем данные наблюдений.

Вычислим приближенное количество интервалов группирования по формуле (2.6):

$$k = 1 + 3,3 \lg 45 = 6,45.$$

Полученное значение округляем в меньшую сторону $k = 6$.

Упорядочим значения наработок в порядке возрастания:

70 102,1 118,7 125 133,5 139,9 144,3 145,6 160 163,6 165,1 165,6 167,6 173,2
177,7 190,3 192,2 192,9 197,6 198,9 199,2 201,4 205,2 209,6 217,1 218,3 223,1
223,8 226,5 227,3 231,8 233 234 236,1 238,5 241,8 246 246,6 250,8 251,7 255,3
260,6 265 283,8 329,9

Рассчитаем величину интервала группирования:

$$\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/k = (329,9 - 70)/6 = 43,3.$$

С помощью таблицы 2.1 подсчитаем число попаданий результатов наблюдений и середину каждого интервала группирования.

Таблица 2.1 – Подсчет \bar{x}_j и m_j

Номер интервала	Границы интервалов	Середина интервала, \bar{x}_j	Число попаданий, m_j
1	70 - 113,3	91,7	1
2	113,3 - 156,6	135	1
3	156,6 - 200	178,3	6
4	200 - 243,3	221,6	13
5	243,3 - 286,6	264,9	15
6	286,6 - 329,9	308,2	9

Найдем оценку математического ожидания с помощью формулы (2.7):

$$\bar{X} = (91,7 \cdot 1 + 135 \cdot 1 + \dots + 308,2 \cdot 9) / 45 = 242,8.$$

Найдем оценку дисперсии по формуле (2.8):

$$S^2 = (1/(45 - 1)) / ((91,7 - 242,8)^2 \cdot 1 + (135 - 242,8)^2 \cdot 1 + \dots + (308,2 - 242,8)^2 \cdot 9) = 62895,5.$$

Среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации определяются аналогично примеру 1:

$$S = \sqrt{62895,5} = 250,8;$$

$$v = \frac{250,8}{242,8} = 1,24.$$

Данные числовые характеристики называют точечными, так как они характеризуют изучаемую случайную величину одним числом. При небольшом числе испытаний указанные характеристики, как правило, отличаются от их истинных значений. В связи с этим, наряду с точечными характеристиками применяются так называемые интервальные оценки.

2.2 Интервальные оценки

Интервальные оценки - это оценки, которые с доверительной вероятностью γ в некотором интервале содержат истинное значение числовой характеристики:

$$P(\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}) = \gamma, \quad (2.9)$$

где $\underline{\theta}$ и $\bar{\theta}$ - соответственно нижняя и верхняя доверительные границы интервала значений оцениваемой характеристики;
 θ – истинное значение характеристики.

Для получения интервальных оценок необходимо знать закон распределения случайной величины.

Если показатель надежности подчиняется экспоненциальному закону распределения, то интервальную оценку этого показателя определяют из неравенства (2.10):

$$\frac{2 \sum_{i=1}^n x_i}{\chi_{\frac{\delta}{2}}^2(f)} < \bar{X} < \frac{2 \sum_{i=1}^n x_i}{\chi_{1-\frac{\delta}{2}}^2(f)}, \quad (2.10)$$

где $\chi_{\frac{\delta}{2}}^2(f)$ и $\chi_{1-\frac{\delta}{2}}^2(f)$ - квантили χ^2 распределения, соответствующие вероятностям $\frac{\delta}{2}$ и $1-\frac{\delta}{2}$ и числу степеней свободы $f = 2n$, определяемые по таблице Б1 приложения Б.

Пример 3 Определим интервальную оценку математического ожидания из примера 1 при условии, что описываемая случайная величина подчиняется экспоненциальному закону.

Принимаем значение доверительной вероятности $\gamma = 0,95$, тогда $\alpha = 1 - \gamma = 0,05$.

Тогда $\frac{\delta}{2} = 0,025$ и $1 - \frac{\delta}{2} = 0,975$, число степеней свободы $f = 2 \cdot 15 = 30$.

Этим значениям соответствуют квантили $\chi_{\frac{\delta}{2}}^2(f) = 46,97924$ и

$\chi_{1-\frac{\delta}{2}}^2(f) = 16,79077$, принятые по таблице Б1 приложения Б.

Так как значение математического ожидания известно, то для упрощения расчетов приведем формулу (2.10) к виду:

$$\frac{2n \cdot \bar{x}}{\chi_{\frac{\delta}{2}}^2(f)} < \bar{x} < \frac{2n \cdot \bar{x}}{\chi_{1-\frac{\delta}{2}}^2(f)};$$

$$\frac{2 \cdot 15 \cdot 39,67}{46,97924} < \bar{x} < \frac{2 \cdot 15 \cdot 39,67}{16,79077}.$$

Таким образом, если случайная величина подчиняется экспоненциальному закону, то математическое ожидание времени исправного состояния рулевого управления автобуса «Autosan» находится в интервале 25,3 - 70,9 тыс. км.

Если показатель надежности подчиняется нормальному закону распределения, то интервальную оценку этого показателя определяют из неравенства:

$$\bar{X} - t_{\frac{\delta}{2};f} \frac{S}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \bar{X} + t_{\frac{\delta}{2};f} \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad (2.11)$$

где \bar{X} и S – оценки математического ожидания и дисперсии;

$t_{\frac{\gamma}{2};f}$ - квантиль распределения Стьюдента, соответствующая доверительной вероятности $\gamma = 1 - \alpha$ и числу степеней свободы $f = n-1$, определяемые по таблице Б2 приложения Б.

Пример 4 Определим интервальную оценку математического ожидания из примера 1 при условии, что описываемая случайная величина подчиняется нормальному закону.

При значении доверительной вероятности $\gamma=0,95$ и $f=15-1=14$ определим квантиль распределения Стьюдента по таблице Б2 приложения Б,

$$t_{\frac{\gamma}{2};f} = t_{\frac{0,05}{2};14} = 1,761310.$$

$$39,67 - 1,761310 \frac{14,95}{\sqrt{15}} < \bar{x} < 39,67 + 1,761310 \frac{14,95}{\sqrt{15}}.$$

Если случайная величина подчиняется нормальному закону, то математическое ожидание времени исправного состояния рулевого управления автобуса «Autosan» находится в интервале 32,9 - 46,5 тыс. км.

3 Графическое представление случайной величины

Для определения вида закона распределения случайной величины удобно представить данные наблюдений в графическом виде. Для графического представления данных наблюдения используется специальный график – гистограмма (рисунок 3.1).

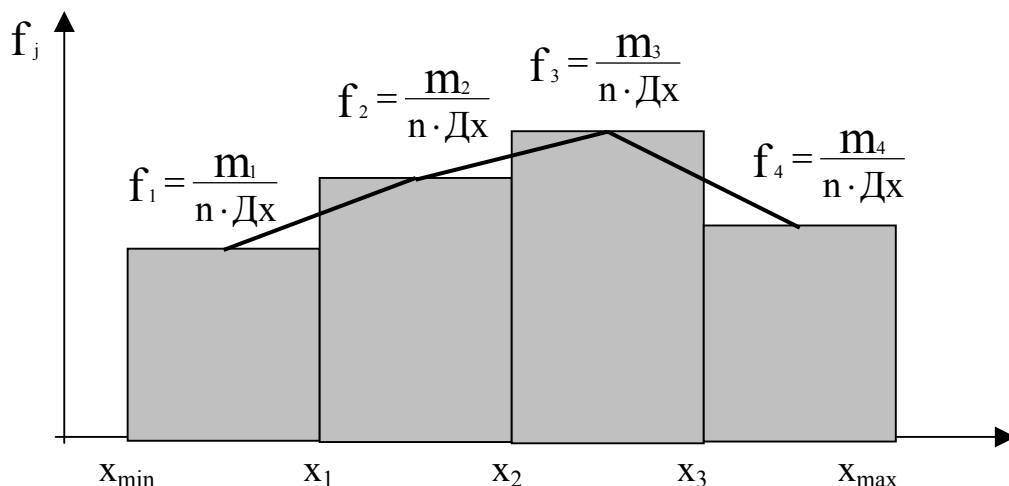


Рисунок 3.1 – Гистограмма и полигон распределения

Гистограмма является важным вспомогательным средством при принятии гипотезы о виде функции распределения. Поэтому необходимо извлечь из нее максимум информации. Дело в том, что форма гистограммы зависит от числа и величины интервалов разбиения. При слишком малом числе интервалов разбиения (интервал велик), плохо выявляются характерные особенности распределения. С ростом числа интервалов характерные особенности выявляются все лучше, но лишь до определенного предела. При большом числе интервалов (интервал слишком мал) гистограмма снова теряет характерные

особенности распределения, превращаясь в пределе (когда в каждом интервале не более одного значения) в чередование "пустых" интервалов и одинаковых по высоте прямоугольников.

Наиболее простой способ разбиения вариационного ряда - это использование равновеликих интервалов, количество которых определяется по специальным формулам, например, по формуле (2.6).

Согласно этому правилу при объеме выборки до тысячи полных реализаций рекомендуемое число интервалов разбиения не превышает одиннадцати. Для объемов выборки $n < 50$, с которыми в основном приходится иметь дело при обработке результатов испытаний на надежность, вид гистограмм слишком чувствителен к способу разбиения, поэтому правило (2.6) можно использовать лишь как ориентировочное. В этих случаях рекомендуется построить несколько вариантов гистограмм для различных способов разбиения вариационного ряда – для $k = 6, 7, 8$ и т.д.

При построении гистограммы по оси абсцисс откладывают в выбранном масштабе интервалы, и, взяв их как основания, строят прямоугольники, высота которых равна статистической плотности распределения на интервале. Построенная таким образом ступенчатая функция f_j называется гистограммой выборки. Эта функция служит статистическим аналогом плотности распределения вероятности случайной величины и на j -ом интервале определяется по формуле 3.1

$$f_j = m_j / (n \cdot \Delta x). \quad (3.1)$$

Площадь гистограммы равна единице.

Если соединить прямыми линиями середины верхних (горизонтальных) сторон прямоугольников гистограммы, то получится полигон распределения в виде ломаной линии (рисунок 3.1).

При построении нескольких гистограмм с разным количеством интервалов лучшей нужно считать гистограмму, имеющую меньшее число инверсий. Признаком инверсии считается изменение знака приращения высоты прямоугольника. Если число инверсий одинаково, лучшей следует считать ту, которая имеет большее число интервалов.

По данным статистического ряда можно вычислить еще одну характеристику случайной величины - эмпирическую интегральную функцию распределения. Значение эмпирической интегральной функции распределения для j -ого интервала F_j определяется по формуле:

$$F_j = \sum_{i=1}^j m_i / n. \quad (3.2)$$

Функция распределения $F(x)$ может быть представлена в виде графика, который строится подобно гистограмме, только высоты прямоугольников равны значениям функции распределения соответствующих интервалов.

Пример графика приведен на рисунке 3.2.

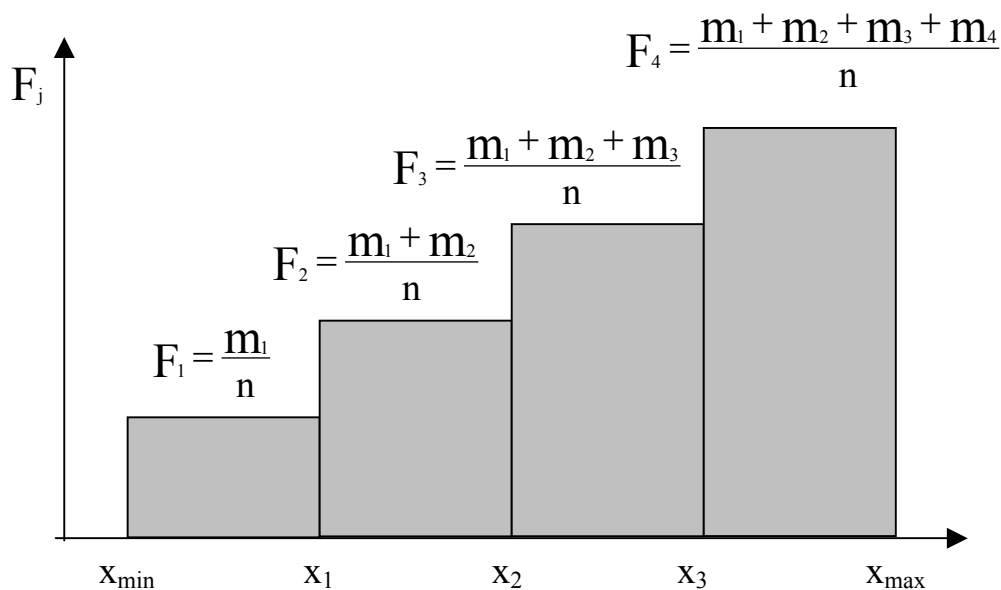


Рисунок 3.2 – График эмпирической интегральной функции распределения опытных данных

Интегральная функция распределения является более универсальной характеристикой распределения по сравнению с гистограммой, которая определяет вероятность того события, что случайная величина X будет меньше или равна заданному значению x . Эмпирическая интегральная функция распределения определяет частоту (опытную вероятность) события $X \leq x$.

Пример 5 Построим гистограмму и график интегральной функции распределения для данных из примера 2.

В качестве первого приближения принимаем число интервалов, рассчитанное по формуле Стенжера.

Принимаем число интервалов $k = 6$, ширина интервала $\Delta x = 43,3$.

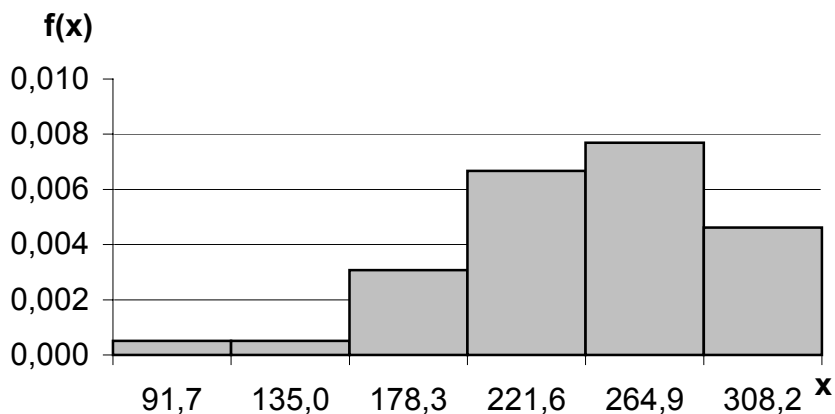


Рисунок 3.3

В этом случае имеем одну инверсию (при переходе с 5 на 6 интервал).
 Принимаем число интервалов $k = 7$, ширина интервала $\Delta x = 37,13$.
 Расчеты сведены в таблицу 3.1.
 Таблица 3.1 – Подсчет частот

Номер интервала	Границы интервалов	Середина интервала, \bar{x}_j	Число попаданий, m_j
1	70 - 107,1	88,6	1
2	107,1 - 144,3	125,7	1
3	144,3 - 181,4	162,8	4
4	181,4 - 218,5	200,0	9
5	218,5 - 255,6	237,1	11
6	255,6 - 292,8	274,2	15
7	292,8 - 329,9	311,3	4

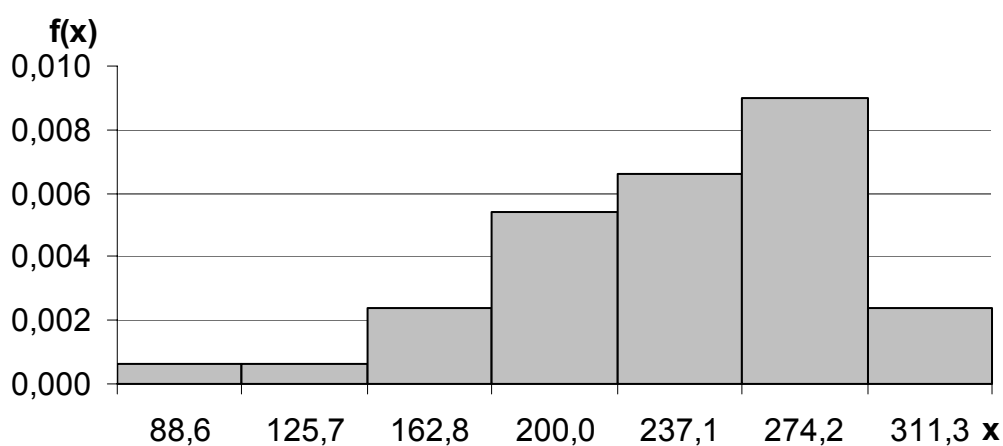


Рисунок 3.4

В этом случае опять получаем одну инверсию.
 Принимаем число интервалов $k = 8$, ширина интервала $\Delta x = 32,5$
 Расчеты сведены в таблицу 3.2

Таблица 3.2 – Подсчет частот

Номер интервала	Границы интервалов	Середина интервала, \bar{x}_j	Число попаданий, m_j
1	70 - 102,5	86,24	1
2	102,5 - 135	118,7	1
3	135 - 167,5	151,2	3
4	167,5 - 200	183,7	7
5	200 - 232,4	216,2	9
6	232,4 - 264,9	248,7	10
7	264,9 - 297,4	281,2	11

8	297,4 - 329,9	313,7	3
---	---------------	-------	---

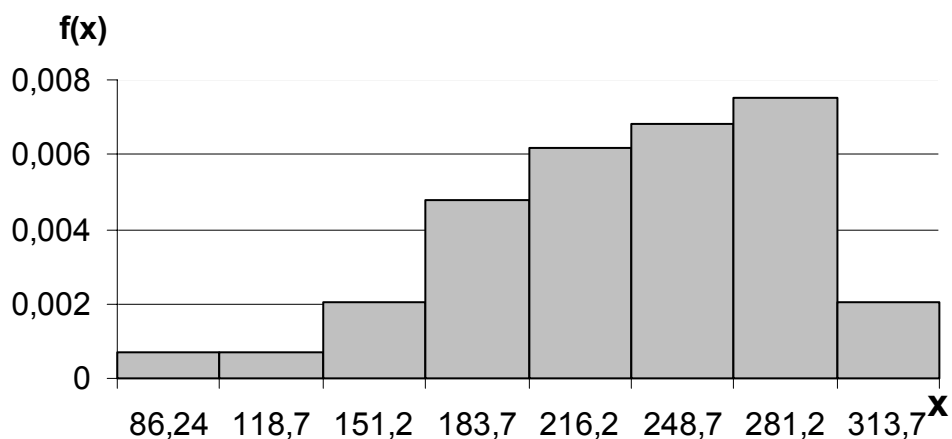


Рисунок 3.5

И в этом случае получаем одну инверсию.

Принимаем число интервалов $k = 9$, ширина интервала $\Delta x = 28,9$.

Расчеты сведены в таблицу 3.3.

Таблица 3.3 – Подсчет частот

Номер интервала	Границы интервалов	Середина интервала, \bar{x}_j	Число попаданий, m_j
1	70 - 98,88	84,4	1
2	98,88 - 127,8	142,2	0
3	127,8 - 156,6	200,0	3
4	156,6 - 185,5	257,7	4
5	185,5 - 214,4	315,5	7
6	214,4 - 243,3	373,2	9
7	243,3 - 272,1	431,0	12
8	272,1 - 301	488,7	7
9	301 - 329,9	315,5	2

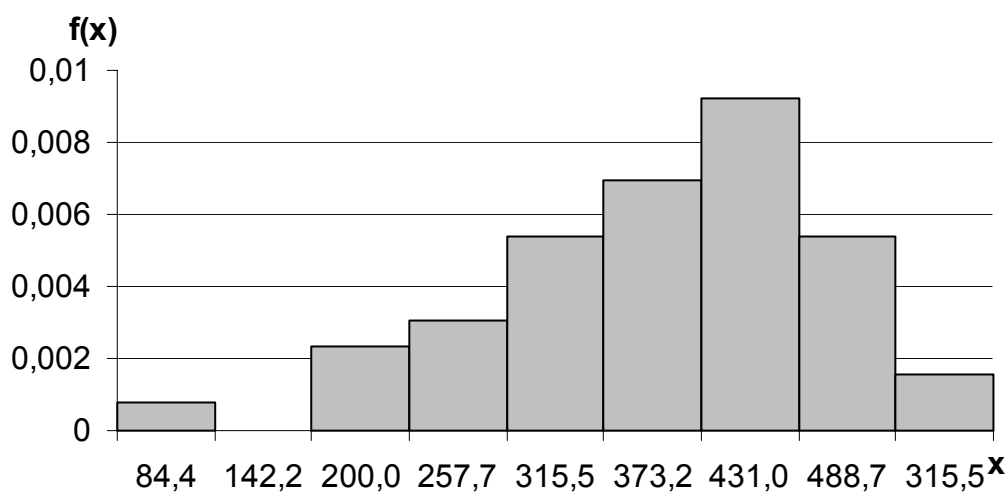


Рисунок 3.6

В данном случае имеем две инверсии (при переходе с 1 на 2 интервал и с 7 на 8). Таким образом принимаем количество интервалов, равное 8, т.к. количество инверсий минимально, а количество интервалов наибольшее.

4 Подгонка теоретических распределений к эмпирическим

Для описания случайной величины с помощью закона распределения вначале необходимо определить, к какому параметрическому семейству он принадлежит. Предварительно теоретический закон распределения может быть подобран, исходя из следующих рекомендаций:

а) принципиальный характер кривой распределения назначается по теоретическим соображениям, связанным с существом задачи, или аналогичным задачам;

б) в некоторых случаях теоретическую кривую выбирают, учитывая внешний вид статического распределения;

в) иногда полезно использовать систему кривых Джонсона или Пирсона, каждая из которых зависит от четырех параметров, и выбор нужной кривой можно осуществить с использованием специально разработанных графиков;

г) при использовании ЭВМ для расчетов можно определить несколько законов распределения и выбрать наилучший. В качестве критерия принимают наилучшее согласие теоретической и экспериментальной кривых распределения.

Для определения параметров выбранного закона распределения в математической статистике разработан ряд методов. Наиболее часто используют метод моментов, согласно которому параметры выбирают с таким расчетом, чтобы важнейшие числовые характеристики теоретического распределения были равны соответствующим статистическим характеристикам.

Для определения точечных оценок используют также метод наименьших квадратов, при котором сумма квадратов отклонений должна обращаться в минимум.

В ряде случаев находит применение метод наибольшего (максимального) правдоподобия, выражаемый функцией

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{X}) = f(x_1, \bar{X})f(x_2, \bar{X}) \dots f(x_n, \bar{X}). \quad (4.1)$$

Сущность метода максимального правдоподобия заключается в том, что в качестве оценки математического ожидания \bar{X} или другого параметра распределения выбирается значение аргумента, которое обращает функцию L в

максимум. Это значение является функцией от x_1, x_2, \dots, x_n и называется оценкой наибольшего (максимального) правдоподобия, определяют его по известным правилам дифференциального исчисления. Следовательно, для определения оценки максимального правдоподобия необходимо решить уравнение:

$$\frac{dL}{dX} = 0 \quad (4.2)$$

Метод наибольшего правдоподобия обладает важными преимуществами. Он всегда приводит к оценкам, имеющим наименьшую возможную дисперсию, и наилучшим образом использует всю информацию о неизвестном параметре. Однако применение этого метода связано с необходимостью решения сложных систем уравнений. Поэтому наиболее приемлемым методом для определения параметров законов распределения является метод моментов.

Для экспоненциального, нормального и логарифмически-нормального распределений оценки параметров, найденных методом наибольшего правдоподобия и методом моментов, совпадают. Формулы, используемые далее для вычисления оценок параметров законов нормального, экспоненциального, логарифмически нормального распределений и распределения Вейбулла получены методом моментов.

4.1 Определение оценок параметров экспоненциального закона

Оценка параметра распределения, λ , находится по формуле:

$$\lambda = 1 / \bar{X}, \quad (4.3)$$

где \bar{X} - оценка математического ожидания выборки.

4.2 Определение оценок параметров нормального закона

Оценка параметра m_t , представляющего собой среднее значение случайной величины t , равна оценке математического ожидания выборки.

Оценка параметра σ равна оценке среднего квадратического отклонения выборки.

4.3 Определение оценок параметров логарифмически нормального закона

Параметр μ вычисляется по формуле:

$$M = \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{n} . \quad (4.4)$$

Параметр S вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - M)^2} . \quad (4.5)$$

В случае больших выборок параметр μ вычисляется по формуле:

$$M = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (\ln \bar{x}_j m_j) . \quad (4.6)$$

Параметр S вычисляется по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^k (\ln \bar{x}_j)^2 m_j - n(M)^2 \right)} . \quad (4.7)$$

Пример 6 Определим оценки параметров логарифмически-нормального закона для данных из примера 1.

Найдем оценку параметра μ с помощью формулы (4.4):

$$\mu = (\ln 13 + \ln 27 + \dots + \ln 44) / 15 = 53,96 / 15 = 3,6.$$

Оценку параметра S можно найти с помощью формулы (4.5). На практике, для облегчения расчетов, используют соотношение примера 1. Таким образом, оценку дисперсии проще найти по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (\ln x_i)^2 - n M^2 \right)}$$

$$S = \sqrt{(1/(15-1))((\ln 13^2 + \ln 27^2 + \dots + \ln 44^2) - 15 \cdot 3,6^2)} =$$

$$\sqrt{(1/14)(169,96 - 15 \cdot 3,6^2)} = 0,45.$$

Определим оценки параметров логарифмически-нормального закона для данных из примера 2.

Найдем оценку параметра μ с помощью формулы (4.6):

$$\mu = (\ln 91,7 \cdot 1 + \ln 135 \cdot 1 + \dots + \ln 308,2 \cdot 9) / 45 = 5,41.$$

Найдем оценку параметра S по формуле (4.7):

$$S = \sqrt{(1/(44))((\ln 91,7)^2 \cdot 1 + (\ln 135)^2 \cdot 1 + \dots + (\ln 308,2)^2 \cdot 9 - 45 \cdot (5,41)^2)} = 0,24.$$

4.4 Определение оценок параметров закона Вейбулла

Оценка параметров масштаба a, формы b и сдвига c методом моментов

осуществляется по выборке независимых наблюдений случайной величины X . Определение производится по значению коэффициента асимметрии с помощью специальных таблиц, в следующем порядке:

вычисляют оценку коэффициента асимметрии по формуле:

$$c_b = \frac{\frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{S^3}; \quad (4.8)$$

для группированных данных оценку коэффициента асимметрии ρ_b вычисляют по формуле:

$$c_b = \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \bar{x})^3 m_j}{S^3} \quad (4.9)$$

- по полученному значению ρ_b из таблицы Б4 приложения Б при помощи линейной интерполяции находим оценку параметра b и значения коэффициентов g_b и K_b ;

- определяем оценку для параметра a по формуле:

$$a = \frac{S}{g_b}; \quad (4.10)$$

- находим значение \bar{c} по формуле:

$$\bar{c} = \bar{X} - \bar{a} K_b; \quad (4.11)$$

в качестве оценки параметра c берут одно из двух значений:

$$c = \begin{cases} \bar{c}, & \text{если } \bar{c} \leq t_{\min} \\ t_{\min}, & \text{если } \bar{c} > t_{\min} \end{cases} \quad (4.12)$$

Пример 7 Определим оценки параметров закона Вейбулла для данных из примера 2.

Вычислим значение коэффициента асимметрии по формуле (4.9):

$$\rho_b = (1/45)((91,7-242,8)^3 \cdot 1 + \dots + (308,2-242,8)^3 \cdot 9)/60,48^3 = 0,826.$$

По таблице Б4 приложения Б с помощью линейной интерполяции находим значения оценок параметра b и значения коэффициентов g_b и K_b .

Интерполяцию будем производить по схеме Эйткина. По зависимости значений параметра формы от коэффициента асимметрии в двух точках

$$\begin{aligned}\rho_{b0} &= 0,865, b_0 = 1,70, \\ \rho_{b1} &= 0,779, b_1 = 1,80,\end{aligned}$$

взятых так, что $\rho_{b0} > \rho_b > \rho_{b1}$.

Найдем с помощью схемы Эйткина значение b для $\rho_b = 0,83$ с помощью формулы:

$$b = \frac{1}{c_{b1} - c_{b0}} \begin{vmatrix} b_0 & c_{b0} - c_b \\ b_1 & c_{b1} - c_b \end{vmatrix}. \quad (4.13)$$

$$b = \frac{1}{0,779 - 0,865} \begin{vmatrix} 1,7 & 0,865 - 0,826 \\ 1,8 & 0,779 - 0,826 \end{vmatrix} = \frac{1}{-0,086} (1,7 \cdot (-0,047) - 1,8 \cdot 0,039) = 1,745.$$

Аналогичным образом находим значения коэффициентов g_b и K_b :

$$g_b = \frac{1}{0,779 - 0,865} \begin{vmatrix} 0,540 & 0,865 - 0,826 \\ 0,511 & 0,779 - 0,826 \end{vmatrix} = \frac{1}{-0,086} (0,540 \cdot (-0,047) - 0,511 \cdot 0,039) = 0,52;$$

$$K_b = \frac{1}{0,779 - 0,865} \begin{vmatrix} 0,892 & 0,865 - 0,826 \\ 0,889 & 0,779 - 0,826 \end{vmatrix} = \frac{1}{-0,086} (0,892 \cdot (-0,047) - 0,889 \cdot 0,039) = 0,891.$$

Определим значение параметра a :

$$a = 60,48 / 0,527 = 114,76.$$

Находим значение \bar{c} :

$$\bar{c} = 201,8 - 114,76 \cdot 0,891 = 99,55.$$

Так как $99,55 > 70$, принимаем $c = 70$.

5 Проверка соответствия с помощью критериев согласия

Соответствие принятого (теоретического) закона распределения экспериментальному при достаточно большом объеме выборки данных (результатов наблюдений) оценивается по критериям согласия.

Обычно проверка содержит следующие основные этапы:

- определяют некоторое число, называемое критерием согласия, основываясь на полученных статистических данных;
- определяют вероятность получения статистических данных, адекватных вычисленному критерию при условии, что закон распределения выбран правильно; это выполняют с помощью таблицы процентилей распределения критерия;
- если вероятность получить вычисленные значения критерия, адекватные статистическим данным, мала, то принятая статистическая модель распределения не дает правильного описания данных.

Слова "малая вероятность" зависят от мнения потребителя и последствий вызываемых отклонением модели. Вероятность события мала при значениях P , равных 0,10; 0,05 и менее. Если же вероятность получения адекватного вычисленного критерия довольно большая, то нет оснований считать, что

модель не подходит.

Однако следует четко представлять, что эта методика позволяет отвергнуть модель как неправильную, все же она *не позволяет доказать*, что модель верна. Исход статистических испытаний в значительной мере зависит от числа имеющихся данных: чем больше данных, тем больше шансов отвергнуть неправильную модель. Если данных очень мало, то часто невозможно установить неадекватность даже такой модели, которая существенно отличается от принятой.

Разработано множество критериев для оценки справедливости принятых допущений о распределениях. Некоторые критерии справедливы лишь для определенных моделей, другие применимы для широкого круга распределений.

5.1 Проверка с помощью критерия Пирсона

Основным преимуществом этого критерия является то, что он может быть использован для проверки допущения о любом распределении, даже в случае, если не известны значения параметров распределения. Главный недостаток критерия – его нечувствительность к обнаружению адекватной модели, когда число наблюдений невелико. На практике при применении критерия Пирсона необходимо, чтобы число наблюдений, попавших в интервал, было не менее пяти. Если на какой то интервал попадает менее пяти значений, его объединяют с соседним.

В случае, когда значения параметров распределения определены, полученные в пункте 2.1 эмпирические частоты попадания исходных данных в интервал m_j сопоставляются с частотами, вычисленными по теоретическому уравнению плотности распределения вероятностей m'_j , вычисляемые по формуле:

$$m'_j = n \cdot f_j \cdot \Delta L, \quad (5.1)$$

где n - объем выборки;

f_j - плотность распределения вероятностей, вычисленная по теоретическому уравнению плотности распределения принятого закона для середины каждого интервала.

Критерий Пирсона записывается в виде следующего условия:

$$P_{кр.}(\chi^2; k) = \begin{cases} \geq \alpha - \text{гипотеза о принадлежности} \\ \text{опытных данных к рассматриваемому} \\ \text{закону не отвергается} \\ < \alpha - \text{гипотеза о принадлежности опытных данных} \\ \text{к рассматриваемому закону отвергается,} \end{cases} \quad (5.2)$$

где χ^2 вычисляется по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^r \frac{(m_j - m'_j)^2}{m'_j}; \quad (5.3)$$

k – число степеней свободы.

Число степеней свободы определяется:

- для однопараметрического распределения по формуле:

$$k = r - 1, \quad (5.4)$$

где r – количество интервалов;

- для многопараметрического распределения по формуле:

$$k = r - s, \quad (5.5)$$

где s – число наложенных связей, определяемое по формуле:

$$s = \pi + 1, \quad (5.6)$$

где π – число параметров закона распределения.

По таблице Б5 приложения Б с помощью линейной интерполяции определяется значение критической вероятности $P_{кр.}(\chi^2; k)$, затем при помощи условия (5.2) делают вывод о принадлежности опытных данных к рассматриваемому закону.

Пример 8 С помощью критерия Пирсона определим соответствие данных из примера 2 нормальному закону.

Определим значения функции плотности распределения вероятностей на каждом интервале по теоретическому уравнению. Теоретическое уравнение для нормального закона имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(t - m_t)^2}{2\sigma^2} \right],$$

где m_t и σ - параметры распределения;

t – переменная, в качестве которой принимаем середины интервалов.

Расчеты удобно проводить с помощью таблицы 5.1.

У нормального закона распределения два параметра ($n = 2$), значит число наложенных связей $s = 3$. Так как число интервалов сократилось за счет объединения интервалов, число степеней свободы $k = 2$. Далее по таблице Б5 приложения Б по полученным значениям $k = 2$ и $\chi^2 = 1,6$ методом линейной интерполяции находим значение $P_{кр.}$:

$$\begin{aligned} \chi^2_0 = 1, P_{кр.0} = 0,606; \\ \chi^2_1 = 2, P_{кр.1} = 0,367; \end{aligned}$$

$$P_{кр.} = \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha} - \chi^2_0} \left| \begin{matrix} P_{кр.0} & \chi^2_0 - \chi^2 \\ P_{кр.1} & \chi^2_1 - \chi^2 \end{matrix} \right|.$$

Таблица 5.1 – Расчет значения χ^2

Номер интервала	Середина интервала	Теоретическое значение функции плотности распределения вероятности $f(\bar{x}_j)$	Теоретическая частота m'_j	Опытная частота m_j	$\frac{(m_j - m'_j)^2}{m'_j}$
j	\bar{x}_j				
1	86,24	0,000168	0,25	1	0,01
2	118,7	0,000765	1,21	1	
3	151,2	0,002375	3,47	3	
4	183,7	0,005034	7,36	7	0,02
5	216,2	0,007282	10,65	9	0,25
6	248,7	0,007190	10,51	10	0,02
7	281,2	0,004845	7,08	11	1,29
8	313,7	0,002229	3,26	3	
					$\chi^2 = 1,6$

$$P_{кр.} = \frac{1}{2-1} \left| \begin{matrix} 0,606 & 1-1,6 \\ 0,367 & 2-1,6 \end{matrix} \right| = \frac{1}{1} (0,606 \cdot 0,4 - 0,367 \cdot (-0,6)) = 0,4626 > 0,05.$$

Гипотеза о принадлежности опытных данных нормальному закону не отвергается.

5.2 Проверка с помощью критерия Колмогорова

Критерий, предложенный А.Н. Колмогоровым, позволяет с достаточно большой достоверностью проверить, принадлежат ли статистические данные распределений вероятностей безотказной работы изделия к предполагаемому типу семейств законов распределения. Достоинством критерия Колмогорова является то, что его можно использовать для малых n (порядка единиц и десятков).

При проверке вычисляют значения эмпирической функции последовательно во всех интервалах и в этих же интервалах последовательно вычисляют значения теоретической функции. Затем находят интервал, в котором отклонение D_d , определяемое по формуле (5.8), принимает максимальное значение:

$$D_d = \max |F_{\Sigma} - F_T|. \quad (5.7)$$

Далее проводят сравнение со значениями из таблицы Б6 приложения Б.

Гипотезу о характере закона распределения отвергают с вероятностью $1-\alpha$, если $D_d > D_{d, \alpha}$, в противном случае эту гипотезу принимают.

Пример 9 С помощью критерия Колмогорова определим соответствие данных из примера 2 нормальному закону.

Определим значения интегральной функции распределения вероятностей на каждом интервале по теоретическому уравнению. Теоретическое уравнение для нормального закона имеет вид:

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt = \frac{1}{y\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^t \exp\left[-\frac{(t-m_t)^2}{2y^2}\right] dt. \quad (5.8)$$

Для облегчения вычислений интегралов используются специальные таблицы. Таблицы для нормального распределения в функции $(t - m_t)$ и σ были бы громоздкими, так как имели бы два параметра. Поэтому используют таблицы для нормального распределения, у которого $m_t = 0$, $\sigma = 1$. Для этого распределения функция плотности имеет одну переменную X :

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]. \quad (5.9)$$

Функция распределения будет иметь вид:

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^x f_0(x) dx. \quad (5.10)$$

В литературе по надежности часто вместо интегральной функции распределения $F_0(x)$ используется функция Лапласа:

$$\Pi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx. \quad (5.11)$$

Очевидно, что

$$F_0(x) = \int_{-\infty}^x f_0(x) dx + \int_0^x f_0(x) dx = 0,5 + \Phi(x). \quad (5.12)$$

Эта функция протабулирована для различных значений x , и ее обычно представляют в виде таблицы (см. таблицу Б3 приложения Б).

При использовании таблицы следует применять подстановку

$$x = (t - m)/\sigma, \quad (5.13)$$

где x – квантиль нормированного нормального распределения.

Так как функция Лапласа нечетная, то справедливо равенство

$$\Phi(-x) = -\Phi(x). \quad (5.14)$$

Таблица 5.2 - Данные для вычисления критерия Колмогорова

Номер интервала j	Середина интервала \bar{x}_j	Теоретическое значение функции плотности распределения вероятности $F_T(\bar{x}_j)$	Опытное значение функции плотности распределения вероятности $F_{\Sigma}(\bar{x}_j)$	$ F_{\Sigma} - F_T $
1	86,24	0,00	0,02	0,02
2	118,7	0,02	0,04	0,02
3	151,2	0,06	0,07	0,01
4	183,7	0,18	0,27	0,09
5	216,2	0,39	0,47	0,08
6	248,7	0,63	0,69	0,06
7	281,2	0,83	0,93	0,1
8	313,7	0,94	1,00	0,06
				$\max = 0,09$

Далее проводим сравнение со значениями из таблицы Б6 приложения Б.

Гипотезу о характере закона распределения отвергают с вероятностью $1-\alpha$, так как $D_d > D_{d, \alpha}$.

Список использованных источников

- 1 Долговечность деталей автомобиля/ В.С. Лукинский, Ю.Г. Котиков, Е.И. Зайцев; Под общ. ред. В.С. Лукинского. - Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1984. –231 с.
- 2 Завадский Ю.В. Статистическая обработка эксперимента в задачах автомобильного транспорта. – М.: МАДИ, 1982. – 136 с.
- 3 Керимов Ф.Ю. Теоретические основы сбора и обработки информации о надежности машин. - М.: МАДИ, 1979. – 135 с.
- 4 Керимов Ф.Ю. Методические указания по лабораторному практикуму курса "Теоретические основы сбора и обработки информации о надежности машин". – М.: МАДИ, 1980. – 121 с.
- 5 Кугель Р.В. Надежность машин массового производства. – М.: Машиностроение, 1981. – 244 с., ил.
- 6 Лукинский В.С. Логистика автомобильного транспорта: концепция, методы, модели /В.С. Лукинский, В.И. Бережной, Е.В. Бережная и др. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 280 с.: ил.
- 7 Рассоха В.И. Основы теории надежности и диагностика автомобилей: Учебное пособие. – Оренбург: ОГУ, 2002. – 144с.
- 8 Техническая эксплуатация автомобильного транспорта / В.Н. Черкис, И.А. Луйк, М.Н. Бедняк и др.; Под общ. ред. М.Н. Бедняка. – К.:Техніка, 1979.–295 с.
- 9 Теннант-Смит Дж. Бейсик для статистиков. – М.:Мир, 1988. – 208 с.
- 10 Труханов В.М. Надежность в технике. – М.: Машиностроение, 1999. – 598 с.
- 11 Шторм Р. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. –М.: Мир, 1970.- 368 с.

Приложение А
(справочное)

Пример оформления титульного листа расчетно-графической работы

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

“ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ”

Транспортный факультет

Кафедра автомобильного транспорта

ОТЧЕТ

по расчетно-графической работе

по дисциплине "Основы теории надежности и диагностика"

Статистическая обработка данных о надежности

ГОУ ОГУ 150200.6004.10 О

Руководитель

_____ Петров П.П.

" ____ " _____ 2004 г.

Исполнитель

студент гр. 01 ААХ-1

_____ Иванов И.И.

" ____ " _____ 2004г.

Оренбург 2004

Приложение Б
(справочное)
Справочные таблицы

Таблица Б1 – Квантили для χ^2 распределения

f\1-α	0,950	0,900	0,750	0,500	0,250	0,100
1	0,00393	0,01579	0,10153	0,45494	1,32330	2,70554
2	0,10259	0,21072	0,57536	1,38629	2,77259	4,60517
3	0,35185	0,58437	1,21253	2,36597	4,10834	6,25139
4	0,71072	1,06362	1,92256	3,35669	5,38527	7,77944
5	1,14548	1,61031	2,67460	4,35146	6,62568	9,23636
6	1,63538	2,20413	3,45460	5,34812	7,84080	10,64464
7	2,16735	2,83311	4,25485	6,34581	9,03715	12,01704
8	2,73264	3,48954	5,07064	7,34412	10,21885	13,36157
9	3,32511	4,16816	5,89883	8,34283	11,38875	14,68366
10	3,94030	4,86518	6,73720	9,34182	12,54886	15,98718
11	4,57481	5,57778	7,58414	10,34100	13,70069	17,27501
12	5,22603	6,30380	8,43842	11,34032	14,84540	18,54935
13	5,89186	7,04150	9,29907	12,33976	15,98391	19,81193
14	6,57063	7,78953	10,16531	13,33927	17,11693	21,06414
15	7,26094	8,54676	11,03654	14,33886	18,24509	22,30713
16	7,96165	9,31224	11,91222	15,33850	19,36886	23,54183
17	8,67176	10,08519	12,79193	16,33818	20,48868	24,76904
18	9,39046	10,86494	13,67529	17,33790	21,60489	25,98942
19	10,11701	11,65091	14,56200	18,33765	22,71781	27,20357
20	10,85081	12,44261	15,45177	19,33743	23,82769	28,41198
21	11,59131	13,23960	16,34438	20,33723	24,93478	29,61509
22	12,33801	14,04149	17,23962	21,33704	26,03927	30,81328
23	13,09051	14,84796	18,13730	22,33688	27,14134	32,00690
24	13,84843	15,65868	19,03725	23,33673	28,24115	33,19624
25	14,61141	16,47341	19,93934	24,33659	29,33885	34,38159
26	15,37916	17,29188	20,84343	25,33646	30,43457	35,56317
27	16,15140	18,11390	21,74940	26,33634	31,52841	36,74122
28	16,92788	18,93924	22,65716	27,33623	32,62049	37,91592
29	17,70837	19,76774	23,56659	28,33613	33,71091	39,08747
30	18,49266	20,59923	24,47761	29,33603	34,79974	40,25602

Таблица Б2 – Квантили распределения Стьюдента

f\α	0,40	0,25	0,10	0,05
1	0,324920	1,000000	3,077684	6,313752
2	0,288675	0,816497	1,885618	2,919986
3	0,276671	0,764892	1,637744	2,353363
4	0,270722	0,740697	1,533206	2,131847
5	0,267181	0,726687	1,475884	2,015048
6	0,264835	0,717558	1,439756	1,943180
7	0,263167	0,711142	1,414924	1,894579
8	0,261921	0,706387	1,396815	1,859548
9	0,260955	0,702722	1,383029	1,833113
10	0,260185	0,699812	1,372184	1,812461
11	0,259556	0,697445	1,363430	1,795885
12	0,259033	0,695483	1,356217	1,782288
13	0,258591	0,693829	1,350171	1,770933
14	0,258213	0,692417	1,345030	1,761310
15	0,257885	0,691197	1,340606	1,753050
16	0,257599	0,690132	1,336757	1,745884
17	0,257347	0,689195	1,333379	1,739607
18	0,257123	0,688364	1,330391	1,734064
19	0,256923	0,687621	1,327728	1,729133
20	0,256743	0,686954	1,325341	1,724718
21	0,256580	0,686352	1,323188	1,720743
22	0,256432	0,685805	1,321237	1,717144
23	0,256297	0,685306	1,319460	1,713872
24	0,256173	0,684850	1,317836	1,710882
25	0,256060	0,684430	1,316345	1,708141
26	0,255955	0,684043	1,314972	1,705618
27	0,255858	0,683685	1,313703	1,703288
28	0,255768	0,683353	1,312527	1,701131
29	0,255684	0,683044	1,311434	1,699127
30	0,255605	0,682756	1,310415	1,697261

Таблица БЗ – Функция Лапласа $\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000 0	0,0040 0	0,0080 0	0,0120 0	0,0160 0	0,0199 0	0,0239 0	0,0279	0,0319 0	0,0359 0
0,1	0,0308 0	0,0438 0	0,0478 0	0,0517 0	0,0557 0	0,0598 0	0,0636 0	0,0675	0,0714 0	0,0753 0
0,2	0,0793 0	0,0832 0	0,0871 0	0,0910 0	0,0948 0	0,0987 0	0,1026 0	0,1034	0,1103 0	0,1141 0
0,3	0,1179 0	0,1217 0	0,1255 0	0,1293 0	0,1331 0	0,1368 0	0,1406 0	0,1443	0,1480 0	0,1517 0
0,4	0,1554 0	0,1591 0	0,1628 0	0,1664 0	0,1700 0	0,1736 0	0,1772 0	0,1808	0,1844 0	0,1879 0
0,5	0,1915 0	0,1950 0	0,1985 0	0,2019 0	0,2054 0	0,2088 0	0,2123 0	0,2157	0,2190 0	0,2224 0
0,6	0,2257 0	0,2291 0	0,2324 0	0,2357 0	0,2389 0	0,2422 0	0,2454 0	0,2486	0,2517 0	0,2549 0
0,7	0,2580 0	0,2611 0	0,2642 0	0,2673 0	0,2703 0	0,2734 0	0,2764 0	0,2794	0,2823 0	0,2852 0
0,8	0,2881 0	0,2910 0	0,2939 0	0,2967 0	0,2995 0	0,3023 0	0,3051 0	0,3078	0,3106 0	0,3133 0
0,9	0,3159 0	0,3186 0	0,3212 0	0,3238 0	0,3264 0	0,3289 0	0,3315 0	0,3340	0,3365 0	0,3389 0
1,0	0,3413 0	0,3437 0	0,3461 0	0,3485 0	0,3508 0	0,3531 0	0,3551 0	0,3577	0,3599 0	0,3621 0
1,1	0,3643 0	0,3665 0	0,3686 0	0,3708 0	0,3729 0	0,3749 0	0,3770 0	0,3790	0,3810 0	0,3830 0
1,2	0,3849 0	0,3869 0	0,3883 0	0,3907 0	0,3925 0	0,3944 0	0,3962 0	0,3980	0,3997 0	0,4015 0
1,3	0,4032 0	0,4019 0	0,4006 0	0,4082 0	0,4099 0	0,4115 0	0,4131 0	0,4147	0,4162 0	0,4177 0
1,4	0,4192 0	0,4207 0	0,4222 0	0,4236 0	0,4251 0	0,4265 0	0,4279 0	0,4292	0,4306 0	0,4319 0
1,5	0,4332 0	0,4345 0	0,4357 0	0,4370 0	0,4382 0	0,4394 0	0,4406 0	0,4418	0,4429 0	0,4441 0
1,6	0,4452 0	0,4463 0	0,4474 0	0,4484 0	0,4495 0	0,4505 0	0,4515 0	0,4525	0,4535 0	0,4545 0
1,7	0,4554 0	0,4561 0	0,4573 0	0,4582 0	0,4591 0	0,4599 0	0,4608 0	0,4616	0,4625 0	0,4633 0
1,8	0,4641 0	0,4649 0	0,4656 0	0,4664 0	0,4671 0	0,4678 0	0,4686 0	0,4693	0,4699 0	0,4706 0
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767

	0	0	0	0	0	0	0		0	0
2,0	0,4772 5	0,4777 8	0,4783 1	0,4788 2	0,4793 2	0,4798 1	0,4803 0	0,4807 7	0,4812 4	0,4816 9
2,1	0,4821 4	0,4825 7	0,4830 0	0,4834 1	0,4838 2	0,4842 2	0,4846 1	0,4850 0	0,4853 7	0,4857 4
2,2	0,4861 0	0,4864 5	0,4867 9	0,4871 3	0,4874 6	0,4877 8	0,4880 9	0,4864 0	0,4887 0	0,4889 9
2,3	0,4892 8	0,4895 6	0,4898 3	0,4901 0	0,4903 6	0,4906 1	0,4908 6	0,4911 1	0,4913 5	0,4915 8
2,4	0,4918 0	0,4920 2	0,4922 4	0,4924 5	0,4926 6	0,4928 6	0,4930 5	0,4932 4	0,4934 3	0,4936 1
2,5	0,4937 9	0,4939 6	0,4941 3	0,4943 0	0,4944 6	0,4946 1	0,4947 7	0,4949 2	0,4950 6	0,4952 0
2,6	0,4953 4	0,4954 7	0,4956 0	0,4957 3	0,4958 5	0,4959 7	0,4960 9	0,4962 1	0,4963 2	0,1001 0
2,7	0,4965 3	0,4965 4	0,4967 4	0,4968 3	0,4969 3	0,4970 2	0,4971 1	0,4972 0	0,4972 8	0,4973 6
2,8	0,4974 4	0,4975 2	0,4976 0	0,4976 7	0,4977 4	0,4978 1	0,4978 8	0,4979 5	0,4980 1	0,4980 7
2,9	0,4981 3	0,4981 9	0,4982 5	0,4983 1	0,4983 6	0,4984 1	0,4984 6	0,4985 1	0,4985 6	0,4986 1
3,0	0,4986 5	0,4990 3	0,4993 1	0,4995 2	0,4996 6	0,4997 7	0,4998 4	0,4998 9	0,4999 3	0,4999 5
4,0 4,5 5,0	Примечание, По расчетному значению квантили x находят функцию $0,499997$ распределения, Так, при $x = 0,45$ $\Phi(x) = 0,17360$									
	0,49999997									

Таблица Б4 – Значения K_b , g_b , ρ_b для заданных значений b

b	K_b	g_b	ρ_b
0,20	120,000	1901,158	190,113
0,30	9,261	50,078	28,334
0,40	3,323	10,438	11,353
0,50	2,000	4,472	6,619
0,60	1,505	2,645	4,593
0,70	1,266	1,851	3,498
0,80	1,133	1,428	2,815
0,90	1,052	1,171	2,345
1,00	1,000	1,000	2,000
1,10	0,965	0,878	1,734
1,20	0,941	0,787	1,521
1,30	0,924	0,716	1,346
1,40	0,911	0,660	1,198

1,50	0,903	0,613	1,072
1,60	0,897	0,574	0,962
1,70	0,892	0,540	0,865
1,80	0,889	0,511	0,779
1,90	0,887	0,486	0,701
2,00	0,886	0,463	0,631
2,10	0,886	0,443	0,567
2,20	0,886	0,425	0,509
2,30	0,886	0,408	0,455
2,40	0,886	0,393	0,405
2,50	0,887	0,380	0,359
2,60	0,888	0,367	0,315
2,70	0,889	0,355	0,275
2,80	0,890	0,344	0,237
2,90	0,892	0,334	0,202
3,00	0,893	0,325	0,168
3,10	0,894	0,316	0,136
3,20	0,896	0,307	0,106
3,30	0,897	0,299	0,078
3,40	0,898	0,292	0,051
3,50	0,900	0,285	0,025
3,60	0,901	0,278	0,001
3,70	0,902	0,272	-0,023
3,80	0,904	0,266	-0,045
3,90	0,905	0,260	-0,067
4,00	0,906	0,254	-0,087
4,10	0,908	0,249	-0,107
4,20	0,909	0,244	-0,126
4,30	0,910	0,239	-0,144
4,40	0,911	0,235	-0,162

Продолжение таблицы Б4

b	K_b	g_b	ρ_b
4,50	0,913	0,230	-0,178
4,60	0,914	0,226	-0,195
4,70	0,915	0,222	-0,210
4,80	0,916	0,218	-0,225
4,90	0,917	0,214	-0,240
5,00	0,918	0,210	-0,254
5,10	0,919	0,207	-0,268
5,20	0,920	0,203	-0,281
5,30	0,921	0,200	-0,294

5,40	0,922	0,197	-0,306
5,50	0,923	0,194	-0,318
5,60	0,924	0,191	-0,330
5,70	0,925	0,188	-0,341
5,80	0,926	0,185	-0,352
5,90	0,927	0,182	-0,363
6,00	0,928	0,180	-0,373
6,10	0,929	0,177	-0,383
6,20	0,929	0,175	-0,393
6,30	0,930	0,172	-0,403
6,40	0,931	0,170	-0,412
6,50	0,932	0,168	-0,421
6,60	0,933	0,165	-0,430
6,70	0,933	0,163	-0,439
6,80	0,934	0,161	-0,447
6,90	0,935	0,159	-0,455
7,00	0,935	0,157	-0,463
7,10	0,936	0,155	-0,471
7,20	0,937	0,153	-0,479
7,30	0,937	0,151	-0,486
7,40	0,938	0,150	-0,493
7,50	0,939	0,148	-0,500
7,60	0,939	0,146	-0,507
7,70	0,940	0,145	-0,514
7,80	0,941	0,143	-0,521
7,90	0,941	0,141	-0,527
8,00	0,942	0,140	-0,534
8,10	0,942	0,138	-0,540
8,20	0,943	0,137	-0,546
8,30	0,943	0,135	-0,552
8,40	0,944	0,134	-0,558
8,50	0,944	0,132	-0,564
8,60	0,945	0,131	-0,569
8,70	0,945	0,130	-0,575

Продолжение таблицы Б4

b	Kb	gb	pb
8,80	0,946	0,128	-0,580
8,90	0,946	0,127	-0,585
9,00	0,947	0,126	-0,591
9,10	0,947	0,125	-0,596
9,20	0,948	0,123	-0,601
9,30	0,948	0,122	-0,606

9,40	0,949	0,121	-0,610
9,50	0,949	0,120	-0,615
9,60	0,950	0,119	-0,620
9,70	0,950	0,118	-0,624
9,80	0,951	0,117	-0,629
9,90	0,951	0,115	-0,633
10,00	0,951	0,114	-0,638

Таблица Б5 – Критические значения вероятностей критерия Пирсона

χ^2	Число степеней свободы $k = K - H$								
	2	3	4	5	6	7	8	10	12
1	0,606	0,801	0,909	0,962	0,935	0,994	0,998	0,999	0,999
2	0,367	0,572	0,735	0,849	0,919	0,959	0,981	0,996	0,999
3	0,223	0,391	0,557	0,700	0,808	0,385	0,934	0,931	0,995
4	0,135	0,261	0,406	0,549	0,676	0,779	0,857	0,947	0,983
5	0,082	0,171	0,287	0,415	0,543	0,660	0,757	0,891	0,958
6	0,049	0,111	0,199	0,306	0,423	0,539	0,647	0,815	0,916
7	0,030	0,071	0,135	0,220	0,320	0,428	0,536	0,725	0,857
8	0,018	0,046	0,091	0,156	0,238	0,332	0,433	0,629	0,758
9	0,011	0,029	0,061	0,109	0,173	0,252	0,342	0,532	0,702
10	0,006	0,018	0,040	0,075	0,124	0,188	0,265	0,440	0,616
11	0,004	0,011	0,026	0,051	0,088	0,138	0,201	0,357	0,528
12	0,002	0,007	0,017	0,034	0,062	0,100	0,151	0,285	0,445
13	0,001	0,004	0,011	0,023	0,043	0,072	0,111	0,223	0,369
14	-	0,002	0,007	0,014	0,029	0,051	0,081	0,173	0,300
15	-	0,001	0,004	0,010	0,020	0,036	0,059	0,132	0,241
16	-	0,001	0,003	0,006	0,013	0,015	0,042	0,099	0,191
17	-	-	0,001	0,004	0,009	0,017	0,030	0,074	0,149
18	-	-	0,001	0,002	0,006	0,012	0,021	0,055	0,115
19	-	-	-	0,001	0,004	0,008	0,014	0,040	0,088
20	-	-	-	0,001	0,002	0,005	0,010	0,029	0,067
21	-	-	-	-	0,001	0,003	0,007	0,021	0,050
22	-	-	-	-	0,001	0,002	0,004	0,015	0,037
23	-	-	-	-	-	0,001	0,002	0,004	0,015
24	-	-	-	-	-	0,001	0,002	0,007	0,020
25	-	-	-	-	-	-	0,001	0,005	0,015
26	-	-	-	-	-	-	0,001	0,003	0,010

Таблица Б6 – Критические значения максимального отклонения ($D_{d,\alpha}$) эмпирической функции распределения от теоретической (случай конечных объемов выборки)

n	$\alpha=0,20$	$\alpha=0,10$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,02$	$\alpha=0,01$
58	0,138	0,158	0,175	0,196	0,210
59	0,137	0,156	0,174	0,194	0,208
60	0,136	0,155	0,172	0,193	0,207
61	0,135	0,154	0,171	0,191	0,205
62	0,133	0,153	0,170	0,190	0,203
63	0,132	0,151	0,168	0,188	0,202
64	0,132	0,150	0,167	0,187	0,200
65	0,131	0,149	0,166	0,185	0,199
66	0,130	0,148	0,164	0,184	0,197